DS1 : Suites - Probabilités - Fonctions

(2 heures - Calculatrice autorisée)

Exercice 1 — 9 points

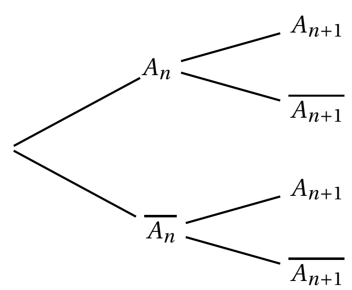
Dans un stand de tir, un tireur effectue des tirs successifs pour atteindre plusieurs cibles.
La probabilité que la première cible soit atteinte est $\frac{1}{2}$.
Lorsqu'une cible est atteinte, la probabilité que la suivante le soit est $\frac{3}{4}$.
Lorsqu'une cible n'est pas atteinte, la probabilité que la suivante soit atteinte est $\frac{1}{2}$.

On note, pour tout entier naturel n non nul :

- A_n l'évènement : « la n-ième cible est atteinte »,
- a_n la probabilité de l'évènement A_n.

1. Donner la valeur de a_1 puis à l'aide d'un arbre pondéré, calculer a_2.

2. **a.** Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous :



b. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$ on a : $a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}$

3. Soit (U_n) la suite définie pour tout entier naturel n non nul, par $U_n = a_n - \frac{2}{3}$.

a. Montrer que la suite (U_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$.

b. En déduire l'expression de U_n en fonction de n, puis l'expression de a_n en fonction de n.

c. Déterminer la limite de la suite (a_n).

Donner une interprétation du résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 2 — 5 points

Soit deux réels a et b et une fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = a\sqrt{x} + bx$.

1. Pour $x > 0$, calculer $f'(x)$ en fonction de a et b.

2. Dans un repère orthogonal du plan, la représentation graphique de la fonction f passe par le point A$(1\,;\,3)$ et la tangente au point A a pour équation $y = 4x - 1$.

Déterminer les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$. Justifier.

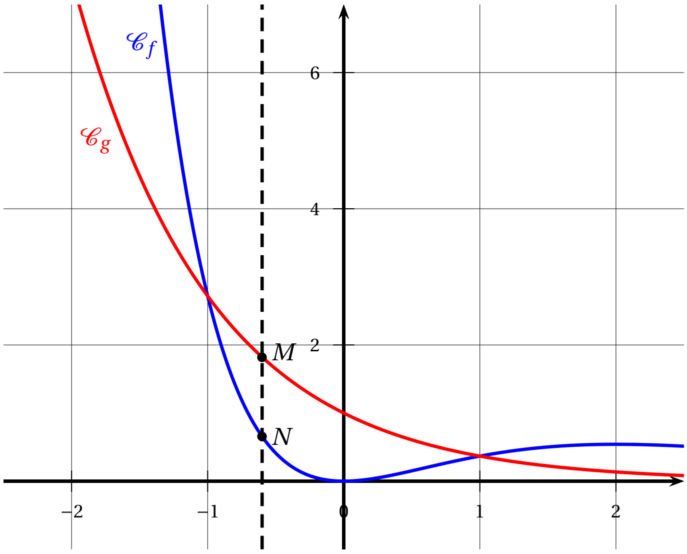
3. Déterminer les valeurs de a et b et l'expression de $f(x)$.

EXERCICE 3 AU DOS DE LA FEUILLE

Exercice 3 — 11 points

Le graphique ci-dessous représente, dans un repère orthogonal, les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 \mathrm{e}^{-x} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \mathrm{e}^{-x}$$



1. **a.** Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

   b. Etudier le signe sur $\mathbb{R}$ de $f(x) - g(x)$.

   c. Déterminer la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

2. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[-1 ; 1]$, on considère les points M de coordonnées $\left(x ; f(x)\right)$ et N de coordonnées $\left(x ; g(x)\right)$, et on note $d(x)$ la distance MN.

   a. Déterminer l'expression $d(x)$.

   b. On admet que la fonction d est dérivable sur l'intervalle $[-1 ; 1]$ et on note d' sa fonction dérivée.

   On rappelle que si u est dérivable sur $\mathbb{R}$ alors la dérivée de e^u est $\mathrm{e}^u \times u'$

   Montrer que $d'(x) = \mathrm{e}^{-x}\left(x^2 - 2x - 1\right)$.

   c. En déduire les variations de la fonction d sur l'intervalle $[-1 ; 1]$.

   d. Déterminer l'abscisse commune x_0 des points M_0 et N_0 permettant d'obtenir une distance $d(x_0)$ maximale, et donner une valeur approchée à $0,1$ près de la distance M_0N_0.