

On considère la suite (U_n) définie par : $U_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $U_{n+1} = \frac{4U_n}{U_n + 4}$.

Partie A

La copie d'écran ci-contre présente les valeurs, calculées à l'aide d'un tableur, des termes de la suite (U_n) pour n variant de 0 à 12, ainsi que celles du quotient $\frac{4}{U_n}$, (avec, pour les valeurs de U_n , affichage de deux chiffres pour les parties décimales).

À l'aide de ces valeurs, conjecturer :

- le signe de U_n ,
- le sens de variation de la suite (U_n) ,
- l'expression de $\frac{4}{U_n}$ en fonction de n .

Partie B Le but de cette question est de démontrer ces conjectures.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $U_n > 0$.
2. Démontrer que la suite (U_n) est décroissante.
3. On considère la suite (V_n) définie pour tout entier naturel n par : $V_n = \frac{4}{U_n}$.
 - a. Démontrer que (V_n) est une suite arithmétique. Préciser sa raison et son premier terme.
 - b. En déduire, pour tout entier naturel n , l'expression de V_n en fonction de n .
4. Déterminer, pour tout entier naturel n , l'expression de U_n en fonction de n .

n	U_n	$\frac{4}{U_n}$
0	1,00	4
1	0,80	5
2	0,67	6
3	0,57	7
4	0,50	8
5	0,44	9
6	0,40	10
7	0,36	11
8	0,33	12
9	0,31	13
10	0,29	14
11	0,27	15
12	0,25	16

On considère la suite (U_n) définie par : $U_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $U_{n+1} = \frac{4U_n}{U_n + 4}$.

Partie A

La copie d'écran ci-contre présente les valeurs, calculées à l'aide d'un tableur, des termes de la suite (U_n) pour n variant de 0 à 12, ainsi que celles du quotient $\frac{4}{U_n}$, (avec, pour les valeurs de U_n , affichage de deux chiffres pour les parties décimales).

À l'aide de ces valeurs, conjecturer :

- le signe de U_n ,
- le sens de variation de la suite (U_n) ,
- l'expression de $\frac{4}{U_n}$ en fonction de n .

Partie B Le but de cette question est de démontrer ces conjectures.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $U_n > 0$.
2. Démontrer que la suite (U_n) est décroissante.
3. On considère la suite (V_n) définie pour tout entier naturel n par : $V_n = \frac{4}{U_n}$.
 - a. Démontrer que (V_n) est une suite arithmétique. Préciser sa raison et son premier terme.
 - b. En déduire, pour tout entier naturel n , l'expression de V_n en fonction de n .
4. Déterminer, pour tout entier naturel n , l'expression de U_n en fonction de n .

n	U_n	$\frac{4}{U_n}$
0	1,00	4
1	0,80	5
2	0,67	6
3	0,57	7
4	0,50	8
5	0,44	9
6	0,40	10
7	0,36	11
8	0,33	12
9	0,31	13
10	0,29	14
11	0,27	15
12	0,25	16