$U_0 = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad U_{n+1} = \frac{4U_n}{U_n+4}$

Partie A

Conjectures : Il semble que pour tout $n > 0$

* la suite (U_n) soit positive
* la suite (U_n) soit décroissante
* $\frac{4}{U_n} = n+4$

Partie B

1) Démontrons par récurrence que pour tout $n \geq 0$ $U_n > 0$

① Soit $n = 0$ $U_0 = 1$ donc $U_0 > 0$
donc vrai pour $n = 0$.

② Soit $n \geq 0$ tel que $U_n > 0$
On va démontrer que $U_{n+1} > 0$.

$U_n > 0$ donc $4U_n > 0$
et $U_n + 4 > 0$

$U_{n+1} = \frac{4U_n}{U_n+4}$ donc $U_{n+1} > 0$.

③ D'après le principe de raisonnement par récurrence pour tout $n \geq 0$ $U_n > 0$.

2) $\forall n \in \mathbb{N}$ $U_{n+1} - U_n = \frac{4U_n}{U_n+4} - U_n = \frac{4U_n - U_n(U_n+4)}{U_n+4}$

$= \frac{4U_n - U_n^2 - 4U_n}{U_n+4} = \frac{-U_n^2}{U_n+4}$

On sait que pour tout $n \geq 0$ $U_n > 0$.
donc $-U_n^2 < 0$
et $U_n + 4 > 0$
donc $U_{n+1} - U_n < 0$
et donc la suite (U_n) est décroissante.

3) $\forall n \in \mathbb{N}$ $V_n = \frac{4}{U_n}$

a) $V_{n+1} - V_n = \frac{4}{U_{n+1}} - \frac{4}{U_n} = \frac{4}{\frac{4U_n}{U_n+4}} - \frac{4}{U_n} = \frac{4(U_n+4)}{4U_n} - \frac{16}{4U_n}$

$= \frac{4U_n}{4U_n} = 1$

donc $V_{n+1} - V_n = 1$ donc $V_{n+1} = V_n + 1$ donc (V_n) est arithmétique de raison 1 avec $V_0 = 4$

b) $\forall n \in \mathbb{N}$ $V_n = V_0 + nr$

$\boxed{V_n = 4 + n}$

4) $\forall n \in \mathbb{N}$ $V_n = \frac{4}{U_n}$

donc $U_n V_n = 4$

donc $U_n = \frac{4}{V_n}$

$\boxed{U_n = \frac{4}{4+n}}$