Limite de suites - Etude des formes indéterminées

① $U_n = -6n^3 + 2n$

On reconnait une forme indéterminée du type $-\infty + \infty$.

On a : $U_n = n(-6n^2 + 2)$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} -6n^2 + 2 = -\infty \end{array}\right\} \text{Par produit : } \boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = -\infty}$$

② $U_n = 4^n - 2^n$

On reconnaît une forme indéterminée du type $+\infty - \infty$.

On a : $U_n = 2^n(2^n - 1)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 2^n - 1 = +\infty \end{array}\right\} \text{Par produit : } \boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty}$$

③ $U_n = -2n + 4\sqrt{n}$

On reconnaît une forme indéterminée du type $-\infty + \infty$.

On a : $U_n = \sqrt{n}\,(-2\sqrt{n} + 4)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} -2\sqrt{n} + 4 = -\infty \end{array}\right\} \text{Par produit : } \boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = -\infty}$$

④ $U_n = \dfrac{1 + n^3}{2 - n^3}$

On reconnaît une forme indéterminée du type $\dfrac{+\infty}{-\infty}$.

On a : $U_n = \dfrac{n^3\left(\dfrac{1}{n^3} + 1\right)}{n^3\left(\dfrac{2}{n^3} - 1\right)} = \dfrac{\dfrac{1}{n^3} + 1}{\dfrac{2}{n^3} - 1}$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^3} + 1 = 1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{n^3} - 1 = -1 \end{array}\right\} \text{Par quotient : } \boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = -1}$$

⑤ $U_n = \dfrac{-3n^2}{1 - 3n}$

On reconnaît une forme indéterminée du type $\dfrac{-\infty}{-\infty}$.

On a : $U_n = \dfrac{n(-3n)}{n\left(\dfrac{1}{n} - 3\right)} = \dfrac{-3n}{\dfrac{1}{n} - 3}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} -3n = -\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} - 3 = -3. \end{array}\right\} \text{Par quotient : } \boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty}$$

⑥ $U_n = \dfrac{\sqrt{n}}{1 - n}$

On reconnaît une forme indéterminée du type $\dfrac{+\infty}{-\infty}$.

On a : $U_n = \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{n}\right)} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{n}}$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} -\sqrt{n} = -\infty \end{array}\right\} \text{Par somme : } \boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{n} = -\infty}$$

Par passage à l'inverse : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0}$

⑦ $U_n = \dfrac{3^n - 2}{5^n + 3}$

On reconnaît une forme indéterminée du type $\dfrac{+\infty}{+\infty}$.

On a : $U_n = \dfrac{3^n\left(1 - \dfrac{2}{3^n}\right)}{5^n\left(1 + \dfrac{3}{5^n}\right)} = \left(\dfrac{3}{5}\right)^n \dfrac{1 - \dfrac{2}{3^n}}{1 + \dfrac{3}{5^n}}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{3}{5}\right)^n = 0$ car $0 < \dfrac{3}{5} < 1$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \dfrac{2}{3^n} = 1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \dfrac{3}{5^n} = 1 \end{array}\right\} \text{Par quotient : } \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1 - \dfrac{2}{3^n}}{1 + \dfrac{3}{5^n}} = 1$$

Par produit : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0}$

⑧ $U_n = 0{,}3^n(2^n + 1)$

On reconnaît une forme indéterminée du type $0 \times \infty$.

On a : $U_n = 0{,}3^n \times 2^n + 0{,}3^n = 0{,}6^n + 0{,}3^n$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}6^n = 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}3^n = 0. \end{array}\right\} \text{Par somme : } \boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0}$$