

Limites avec fonction exponentielle (F.I.)

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1)e^{-x}$

$$\left. \begin{array}{l} x-1 \rightarrow +\infty \\ e^{-x} \rightarrow 0 \end{array} \right\} \text{ F.I. du type } \infty \times 0 \quad \text{La limite est en } +\infty, \text{ il faut utiliser : } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty}$$

On a : $(x-1)e^{-x} = \frac{x-1}{e^x} = \frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x}$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{e^x} = 0 \end{array} \right\} \text{ Par somme : } \boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x} = 0}$$

Conclusion : $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1)e^{-x} = 0}$

2. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^{2x}$ F.I. du type $\infty \times 0$ La limite est en $-\infty$, il faut utiliser : $\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0}$

On a : $x^2 e^{2x} = (x e^x)^2$

On sait que $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x e^x)^2 = \lim_{X \rightarrow 0} X^2 = 0$

Conclusion : $\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^{2x} = 0}$

3. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} x + e^{-x}$ F.I. du type : $-\infty + \infty$ La limite est en $-\infty$, il faut utiliser : $\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0}$

On a : $x + e^{-x} = x + \frac{1}{e^x} = \frac{x e^x + 1}{e^x}$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x + 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+ \text{ car pour tout } x, e^x > 0 \end{array} \right\} \text{ Par quotient : } \boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} x + e^{-x} = +\infty}$$

4. Soit $a > 0$, calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - ax$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \\ a > 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} -ax = +\infty \end{array} \right\} \text{ Par somme : } \boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - ax = +\infty}$$

5. Soit $a > 0$, calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - ax$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \\ a > 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} -ax = -\infty \end{array} \right\} \text{ F.I. du type } +\infty - \infty \quad \text{La limite est en } +\infty, \text{ il faut utiliser : } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty}$$

On a : $e^x - ax = x \left(\frac{e^x}{x} - a \right)$ (Egalité valable pour tout $x \neq 0$)

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} - a = +\infty \end{array} \right\} \text{ Par produit : } \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{e^x}{x} - a \right) = +\infty$$

Conclusion : $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - ax = +\infty}$

6. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\sqrt{x}}$

$$\left. \begin{array}{l} e^x \rightarrow +\infty \\ \sqrt{x} \rightarrow +\infty \end{array} \right\} \text{ F.I. du type } \frac{+\infty}{+\infty} \quad \text{La limite est en } +\infty, \text{ il faut utiliser : } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty}$$

On a : $\frac{e^x}{\sqrt{x}} = \frac{e^x}{x} \times \frac{x}{\sqrt{x}} = \frac{e^x}{x} \times \sqrt{x}$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty \end{array} \right\} \text{ Par produit : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} \times \sqrt{x} = +\infty$$

Conclusion : $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\sqrt{x}} = +\infty}$

7. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{5x}$ F.I. du type $\infty \times 0$ La limite est en $-\infty$, il faut utiliser : $\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0}$

On a : $x e^{5x} = \frac{1}{5} \times 5x e^{5x}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 5x e^{5x} = \lim_{X \rightarrow -\infty} X e^X = 0$$

Conclusion : $\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{5x} = 0}$