Calculatrice autorisée

Exercice 1 **10 points**

Les questions sont indépendantes.

1. Pour $a > 0$, simplifier : $\ln\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^a}\right) - \mathrm{e}^{-\ln(a)}$.

2. Pour $x > 0$ et $y > 0$, écrire $3\ln\left(xy^2\right) - \ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$ sous la forme $a\ln(x) + b\ln(y)$ avec a et b deux réels.

3. Déterminer le plus petit entier n tel que $0{,}85^n \leqslant 0{,}01$.

4. Déterminer une primitive de f sur $]0\,;\,+\infty[$ pour $f(x) = \dfrac{5x^2}{2x^3+1}$

5. Résoudre $\ln(x) = 3\ln^2(x)$ dans $]0\,;\,+\infty[$..

6. Résoudre $\mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^x > 0$ dans $\mathbb{R}$.

7. Calculer la limite : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{1-3\ln(x)}$

8. Soit $f(x) = \ln\left(x^2 + \mathrm{e}^x\right)$

   a. Déterminer l'ensemble de définition de f.

   b. Calculer la dérivée de f.

Exercice 2 **5 points**

Soit la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = x^2 + \Big(\ln(x) - 1\Big)^2$.

1. Démontrer que pour $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{2}{x}\left(x^2 + \ln(x) - 1\right)$.
2. Pour $x > 0$, on pose $g(x) = x^2 + \ln(x) - 1$.

   a. Déterminer les variations de g sur $]0\,;\,+\infty[$.

   b. Calculer $g(1)$ puis en déduire les variations de f.