$\boxed{\text{Ex 1}}$ $A(-2,0,2)$ $B(-1,3,0)$ $C(1,-1,2)$ $D(0,0,3)$

$(d_1) : \begin{cases} x = t \\ y = 3t \\ z = 3+5t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$

$(d_2) \begin{cases} x = 1+3s \\ y = -1-5s \\ z = 2-6s \end{cases}$ $s \in \mathbb{R}$

1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\left.\begin{array}{l} \frac{x}{x'} = \frac{1}{3} \\ \frac{y}{y'} = \frac{3}{-1} = -3 \end{array}\right)$ $\frac{x}{x'} \neq \frac{y}{y'}$

donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires

donc les points A, B, C ne sont pas alignés

2 a) $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 1 + 9 - 10 = 0$

$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 3 - 3 + 0 = 0$

donc $\vec{n} \perp \overrightarrow{AB}$ et $\vec{n} \perp \overrightarrow{AC}$

donc $\vec{n}$ est normal au plan (ABC)

b) (ABC) a une équation de la forme $x + 3y + 5z + d = 0$

$A \in (ABC)$ donc $x_A + 3y_A + 5z_A + d = 0$

$\iff -2 + 0 + 10 + d = 0$

$\iff d = -8$

Donc (ABC) a pour équation $\boxed{x + 3y + 5z - 8 = 0}$

c) $x_D + 3y_D + 5z_D - 8 = 0 + 0 + 15 - 8 = 7 \neq 0$

donc $D \notin (ABC)$

donc A, B, C, D ne sont pas coplanaires

3 a) (d_1) a pour vecteur directeur $\vec{u_1}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ donc $\vec{n}$

donc (d_1) est perpendiculaire au plan (ABC)

Vérifions que (d_1) passe par $D(0,0,3)$

Montrons qu'il existe t tel que $\begin{cases} x_D = t \\ y_D = 3t \\ z_D = 3+5t \end{cases}$

c'est à dire $\begin{cases} 0 = t \\ 0 = 3t \\ 3 = 3+5t \end{cases} \iff \begin{cases} t = 0 \\ t = 0 \\ t = 0 \end{cases} \iff t = 0.$

donc $D \in (d_1)$

et donc (d_1) est la hauteur du tétraèdre $ABCD$ issue de D

b) Montrons qu'il existe t et s tel que

$\begin{cases} t = 1+3s \\ 3t = -1-5s \\ 3+5t = 2-6s \end{cases}$ ce qui prouvera que (d_1) et (d_2) sont sécantes et donnera les coordonnées du point d'intersection

$\iff \begin{cases} t - 3s = 1 \\ 3t + 5s = -1 \\ 5t + 6s = -1 \end{cases} \iff \begin{array}{l} \\ -3L_1+L_2 \\ -5L_1+L_2 \end{array}\begin{cases} t - 3s = 1 \\ 14s = -4 \\ 21s = -6 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} t - 3s = 1 \\ s = -\frac{4}{14} \\ s = -\frac{6}{21} \end{cases} \iff \begin{cases} t = 1+3s \\ s = -\frac{2}{7} \\ s = -\frac{2}{7} \end{cases} \iff \begin{cases} t = 1 - \frac{6}{7} \\ s = -\frac{2}{7} \end{cases}$

$\iff \begin{cases} t = \frac{1}{7} \\ s = -\frac{2}{7} \end{cases}$

<u>Conclusion</u> (d_1) et (d_2) sont sécantes et si on note K leur point d'intersection on a :

$x_K = t = \frac{1}{7}$

$y_K = 3t = \frac{3}{7}$

$z_K = 3 + 5t = 3 + \frac{5}{7} = \frac{26}{7}$

$\boxed{K\left(\frac{1}{7}, \frac{3}{7}, \frac{26}{7}\right)}$

4a) H est le projeté de D sur (ABC) donc H est l'intersection de (d_1) avec le plan (ABC)

$H \in (d_1)$ donc il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que

$$H(t, 3t, 3+5t)$$

$$H \in (ABC) \iff x_H + 3y_H + 5z_H - 8 = 0$$
$$\iff t + 9t + 5(3+5t) - 8 = 0$$
$$\iff 10t + 15 + 25t - 8 = 0$$
$$\iff 35t = -7$$
$$\iff t = -\frac{7}{35}$$
$$\iff \boxed{t = -\frac{1}{5}}$$

Donc $x_H = t = -\frac{1}{5}$

$y_H = 3t = -\frac{3}{5}$

$z_H = 3 + 5t = 3 + 5 \times \frac{-1}{5} = 3 - 1 = 2$

$$\boxed{H\left(-\frac{1}{5} ; -\frac{3}{5} ; 2\right)}$$

b) La distance de D au plan (ABC) est égale à DH avec $DH = \sqrt{(x_H - x_D)^2 + (y_H - y_D)^2 + (z_H - z_D)^2}$

$$DH = \sqrt{\left(-\frac{1}{5} - 0\right)^2 + \left(-\frac{3}{5} - 0\right)^2 + (2-3)^2}$$

$$DH = \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{9}{25} + 1} = \sqrt{\frac{35}{25}} = \sqrt{\frac{7}{5}}$$

$$\boxed{DH = \sqrt{\frac{7}{5}}}$$

x x

20

Ex 2 Sur $]0, +\infty[$ $f(x) = 3x + 1 - 2x\ln(x)$

1) $f'(x) = 3 - \left(2\ln x + 2x \times \frac{1}{x}\right)$

$f'(x) = 3 - 2\ln(x) - 2 = \boxed{1 - 2\ln(x)}$

$$\boxed{f''(x) = -\frac{2}{x}}$$

Sur $]0, +\infty[$ $f''(x) < 0$

donc f est concave sur $]0, +\infty[$

2) $y = f'(1)(x-1) + f(1)$ $f'(1) = 1 - 2\ln(1) = 1$

$y = 1(x-1) + 4$ $f(1) = 3 + 1 - 2\ln(1) = 4$

$$\boxed{y = x + 3}$$

Équation de la tangente au point d'abscisse 1

3) f est concave sur $]0, +\infty[$

donc $\mathcal{C}_f$ est en-dessous de la tangente

donc $\forall x \in]0, +\infty[$ $f(x) \leq x + 3$

$$\iff 3x + 1 - 2x\ln(x) \leq x + 3$$
$$\iff -2x\ln(x) \leq -2x + 2$$
$$\iff x\ln(x) \geq x - 1$$
$$\iff \boxed{\ln(x) \geq 1 - \frac{1}{x}}$$

car $x > 0$.

25