Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0=2$ et pour $n\in\mathbb{N}$, $\quad U_{n+1}=\frac{2}{3}U_n+\frac{1}{3}n+1=\frac{4}{3}+1=\frac{7}{3}$

1. Calcul de U_1 :

   $U_1=\frac{2}{3}\times U_0+\frac{1}{3}\times 0+1=\frac{2}{3}\times 2+\frac{1}{3}\times 0+1=\frac{7}{3}$ donc $\boxed{U_1=\frac{7}{3}}$

2. **a.** Pour tout $n\in N$, $W_n=U_n-n$ donc

$$\begin{aligned}W_{n+1}&=U_{n+1}-(n+1)\\&=\left(\frac{2}{3}U_n+\frac{1}{3}n+1\right)-(n+1)\\&=\frac{2}{3}U_n+\frac{1}{3}n-n\\&=\frac{2}{3}U_n-\frac{2}{3}n\\&=\frac{2}{3}(U_n-n)\\&=\frac{2}{3}W_n.\end{aligned}$$

Conclusion : pour tout $n\geq 0$ $\boxed{W_{n+1}=\frac{2}{3}W_n}$

donc la suite (W_n) est géométrique de raison $q=\frac{2}{3}$ et de premier terme W_0 avec $W_0=U_0-0=\boxed{2}$

b. Expression de W_n puis U_n en fonction de n :

(W_n) est géométrique donc pour tout $n\in\mathbb{N}$: $\quad W_n=W_0\times q^n$ donc $\boxed{W_n=2\times\left(\frac{2}{3}\right)^n}$

On a la relation entre W_n et U_n : Pour tout $n\geq 0$ $\quad W_n=U_n-n$ donc $\quad U_n=W_n+n$ et donc $\boxed{U_n=2\times\left(\frac{2}{3}\right)^n+n}$.

c. ① **Calcul de** $S=\sum_{k=0}^{12}W_k$:

S est la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique donc $S=W_0\times\dfrac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{13}}{1-\frac{2}{3}}$

$S=2\times\dfrac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{13}}{1-\frac{2}{3}}=2\times\dfrac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{13}}{\frac{1}{3}}=2\times\frac{3}{1}\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{13}\right)$ donc $\boxed{S=6\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{13}\right)}$

② **Calcul de** $T=\sum_{k=0}^{12}U_k$ **:**

$T=\sum_{k=0}^{12}U_k=\sum_{k=0}^{12}(W_k+k)=(W_0+0)+(W_1+1)+(W_2+2)+\cdots+(W_{12}+12)$

En ordonnant les termes on a : $\quad T=(W_1+W_2+\cdots+W_{12})+(1+2+\cdots+12)$ donc $T=\sum_{k=0}^{12}W_k+\sum_{k=0}^{12}k=S+\sum_{k=0}^{12}k$

Calcul de $\sum_{k=0}^{12}k$:

On a : $\sum_{k=0}^{12}k=0+1+2+3+\cdots+12$

donc $\sum_{k=0}^{12}k$ est la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison 1

donc $\sum_{k=0}^{12}k=\frac{(0+12)\times 13}{2}=6\times 13=\boxed{78}$

Conclusion : $T=6\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{13}\right)+78$ donc $\boxed{T=84-6\left(\frac{2}{3}\right)^{13}}$