

DN2 Suites et récurrence

$$U_0 = 3 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad U_{n+1} = \frac{1}{5}U_n + \frac{4}{5}$$

$$1) \quad U_1 = \frac{1}{5}U_0 + \frac{4}{5} = \frac{3}{5} + \frac{4}{5} = \boxed{\frac{7}{5}}$$

$$U_2 = \frac{1}{5}U_1 + \frac{4}{5} = \frac{1}{5} \times \frac{7}{5} + \frac{4}{5} = \frac{7}{25} + \frac{20}{25} = \boxed{\frac{27}{25}}$$

2) a) Pour $n \geq 0$ on note $P(n): U_n \geq 1$

① Initialisation:

Pour $n=0$ on a $U_n = U_0 = 3$ donc $U_0 \geq 1$
donc $P(n)$ vraie pour $n=0$

② Hérédité:

Pour $n \geq 0$ on va démontrer que si $P(n)$ est vraie
alors $P(n+1)$ est vraie
Pour $n \geq 0$ on va donc démontrer que si $U_n \geq 1$
alors $U_{n+1} \geq 1$

D'après l'énoncé $U_{n+1} = \frac{1}{5}U_n + \frac{4}{5}$

Si $U_n \geq 1$ alors $\frac{1}{5}U_n \geq \frac{1}{5}$

et $\frac{1}{5}U_n + \frac{4}{5} \geq \frac{1}{5} + \frac{4}{5}$

donc $U_{n+1} \geq 1$ CQFD

③ Conclusion:

D'après le principe de raisonnement par récurrence
pour tout $n \geq 0$ $U_n \geq 1$

b) $\forall n \geq 0 \quad U_{n+1} - U_n = \frac{1}{5}U_n + \frac{4}{5} - U_n = -\frac{4}{5}U_n + \frac{4}{5}$
 $= \frac{4}{5}(-U_n + 1)$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{4}{5}(1 - U_n)$$

D'après a) $\forall n \geq 0 \quad U_n \geq 1$ donc $1 - U_n \leq 0$

donc $U_{n+1} - U_n \leq 0$

donc $U_{n+1} \leq U_n$

donc (U_n) est décroissante

(2)

3) Pour $n \geq 0$ on note $Q(n): U_n = \frac{2}{5^n} + 1$

① Initialisation:

Pour $n=0$ on a d'une part $U_n = U_0 = \boxed{3}$

d'autre part: $\frac{2}{5^n} + 1 = \frac{2}{5^0} + 1 = 2 + 1 = \boxed{3}$

donc $Q(n)$ est vraie pour $n=0$

② Hérédité:

Pour $n \geq 0$ on va démontrer que si $Q(n)$ est vraie alors

$Q(n+1)$ est vraie

Pour $n \geq 0$ on va donc démontrer que si $U_n = \frac{2}{5^n} + 1$
alors $U_{n+1} = \frac{2}{5^{n+1}} + 1$

D'après l'énoncé $U_{n+1} = \frac{1}{5}U_n + \frac{4}{5}$

Si $U_n = \frac{2}{5^n} + 1$ alors $U_{n+1} = \frac{1}{5}\left(\frac{2}{5^n} + 1\right) + \frac{4}{5}$
 $= \frac{2}{5^{n+1}} + \frac{1}{5} + \frac{4}{5}$

$= \frac{2}{5^{n+1}} + 1$ CQFD

③ Conclusion:

D'après le principe de raisonnement par récurrence
pour tout $n \geq 0 \quad U_n = \frac{2}{5^n} + 1$

4) $\forall n \geq 0 \quad W_n = \frac{2}{5^n}$

a) $\forall n \geq 0 \quad W_{n+1} = \frac{2}{5^{n+1}} = \frac{2}{5^n} \times \frac{1}{5} = W_n \times \frac{1}{5}$

donc $W_{n+1} = W_n \times \frac{1}{5}$

donc (W_n) est géométrique de raison $\frac{1}{5}$
et de 1^{er} terme W_0

avec $W_0 = \frac{2}{5^0} = \boxed{2}$

b) $\sum_{k=0}^n W_k = W_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$
 $= 2 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{5}} = 2 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}}{\frac{4}{5}}$
 $= 2 \times \frac{5}{4} \left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}\right)$

$$\sum_{k=0}^n W_k = \frac{5}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}\right)$$

(3)

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n u_k &= \sum_{k=0}^n \left(\frac{2}{5^k} + 1 \right) = \sum_{k=0}^n \frac{2}{5^k} + \sum_{k=0}^n 1 \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{2}{5^k} + \underbrace{(1+1+\dots+1)}_{n+1 \text{ termes}}\end{aligned}$$

donc $\sum_{k=0}^n u_k = \frac{5}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{5} \right)^{n+1} \right) + (n+1) \times 1$

$$\boxed{\sum_{k=0}^n u_k = \frac{5}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{5} \right)^{n+1} \right) + n+1}$$