Exercice 1 Dans chacun des cas, déterminer le nombre de termes qui intervient dans la somme :

1. $U_0 + U_1 + \cdots + U_{12}$

   Si on a $U_1 + \cdots + U_{12}$, on va de 1 à 12 donc on a 12 termes.

   Pour avoir $U_0 + U_1 + \cdots + U_{12}$ on rajoute le terme U_0, on rajoute donc un terme donc on a un total de 13 termes.

   Réponse : $\boxed{\text{13 termes}}$

2. $U_{10} + U_{11} + \cdots + U_{30}$

   Si on a $U_1 + \cdots + U_{30}$, on va de 1 à 30 donc on a 30 termes.

   Pour avoir $U_{10} + U_{11} + \cdots + U_{30}$, on retire les termes U_1, ..., U_9 donc on retire 9 termes donc on a un total de 21 termes.

   Réponse : $\boxed{\text{21 termes}}$

3. $2 + 2^2 + 2^3 \cdots + 2^{40}$

   On a : $2^1 + 2^2 + 2^3 \cdots + 2^{40}$, on va de 1 à 40 donc on a 40 termes.

   Réponse : $\boxed{\text{40 termes}}$

4. $\sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5} + \cdots + \sqrt{25}$

   Si on a : $\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \cdots + \sqrt{25}$, on va de 1 à 25 donc on a 25 termes.

   Pour avoir $\sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5} + \cdots + \sqrt{25}$, on retire les termes $\sqrt{1}$ et $\sqrt{2}$ donc on retire deux termes, on a donc un total de 23 termes.

   Réponse : $\boxed{\text{23 termes}}$

Exercice 2

1. (U_n) est une suite arithmétique de raison 3 et de premier terme $U_0 = 1$. Calculer la somme $U_0 + U_1 + \cdots + U_{10}$.

   On a la somme de 11 termes consécutifs d'une suite arithmétique. On a donc : $U_0 + U_1 + \cdots + U_{10} = \dfrac{(U_0 + U_{10}) \times 11}{2}$

   On a $\boxed{U_0 = 1}$

   Calculons U_{10} : On a pour tout $n \geq 0$, $U_n = U_0 + nr$ donc $U_{10} = U_0 + 10r = 1 + 30$ donc $\boxed{U_{10} = 31}$.

   On a donc : $U_0 + U_1 + \cdots + U_{10} = \dfrac{(U_0 + U_{10}) \times 11}{2} = \dfrac{32 \times 11}{2} = \dfrac{32}{2} \times 11 = 16 \times 11 = 176$

   Réponse : $\boxed{U_0 + U_1 + \cdots + U_{10} = 176}$

2. (U_n) est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $U_1 = 4$. Calculer la somme $U_1 + U_2 + \cdots + U_8$.

   On a la somme de 8 termes consécutifs d'une suite géométrique. On a donc : $U_1 + U_2 + \cdots + U_8 = U_1 \times \dfrac{1 - q^8}{1 - q}$

   donc : $U_1 + U_2 + \cdots + U_8 = 4 \times \dfrac{1 - 2^8}{1 - 2} = 4 \times \dfrac{1 - 2^8}{-1} = -4(1 - 2^8) = 1020$

   Réponse : $\boxed{U_1 + U_2 + \cdots + U_8 = 1020}$

3. Calculer la somme des entiers de 1 à 27.

On reconnait la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison 1.

On a donc $1+2+3+\cdots+27=\dfrac{(1+27)\times 27}{2}=\dfrac{28\times 27}{2}=\dfrac{28}{2}\times 27=14\times 27=378$

Réponse : $\boxed{1+2+3+\cdots+27=378}$

4. Calculer la somme $3^2+3^3+\cdots+3^{10}$ (somme de puissances consécutives de 3)

On reconnait la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison 3.

On a donc $3^2+3^3+\cdots+3^{10}=3^2\times\dfrac{1-3^9}{1-3}=9\times\dfrac{1-3^9}{-2}=\dfrac{-9}{2}\times(1-3^9)=88569$

Réponse : $\boxed{3^2+3^3+\cdots+3^{10}=88569}$

Exercice 3 Soit la suite (S_n) définie pour tout entier naturel n par $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2$.

1. Calculer S_1, S_2 et S_3.

$S_1=\displaystyle\sum_{k=1}^{1}k^2=1^2=1$

Réponse : $\boxed{S_1=1}$

$S_2=\displaystyle\sum_{k=1}^{2}k^2=1^2+2^2=1+4=5$

Réponse : $\boxed{S_2=5}$

$S_3=\displaystyle\sum_{k=1}^{3}k^2=1^2+2^2+3^2=1+4+9$

Réponse : $\boxed{S_3=14}$

2. Exprimer S_9 en fonction de S_8

$S_9=\displaystyle\sum_{k=1}^{9}k^2=1^2+2^2+\cdots+8^2+9^2=\sum_{k=1}^{8}k^2+9^2=S_8+9^2$

Réponse : $\boxed{S_9=S_8+81}$

Exercice 4 Pour tout entier naturel n non nul, ;exprimer S_{n+1} en fonction de S_n dans les cas suivants :

1. $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k$.

$S_{n+1}=\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}k=1+2+3+\cdots+n+(n+1)=\left(\sum_{k=1}^{n}k\right)+(n+1)$

Réponse : $\boxed{S_{n+1}=S_n+n+1}$

2. $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2$.

$S_{n+1}=\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}k^2=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2+(n+1)^2=\left(\sum_{k=1}^{n}k^2\right)+(n+1)^2$

Réponse : $\boxed{S_{n+1}=S_n+(n+1)^2}$

3. $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

$S_{n+1}=\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}=\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)+\frac{1}{n+1}$

Réponse : $\boxed{S_{n+1}=S_n+\dfrac{1}{n+1}}$

Exercice 5 Soit la suite définie pour tout entier naturel n par $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{k^2}{k+1}$.

Calculer S_0 :

$S_0=\displaystyle\sum_{k=0}^{0}\frac{k^2}{k+1}=\frac{0^2}{0+1}=0$

Réponse : $\boxed{S_0=0}$

Calculer S_1 :

$$S_1 = \sum_{k=0}^{1} \frac{k^2}{k+1} = \frac{0^2}{0+1} + \frac{1^2}{1+1} = \frac{1}{2}$$

Réponse : $\boxed{S_1 = \frac{1}{2}}$

Calculer S_2 :

$$S_2 = \sum_{k=0}^{2} \frac{k^2}{k+1} = \frac{0^2}{0+1} + \frac{1^2}{1+1} + \frac{1^2}{1+1} = \frac{1}{2} + \frac{2^2}{2+1} = \frac{1}{2} + \frac{4}{3} = \frac{3}{6} + \frac{8}{6} = \frac{11}{6}$$

Réponse : $\boxed{S_2 = \frac{11}{6}}$

Exercice 6

1. Soit la suite définie pour tout entier naturel n par $S_n = \sum_{k=1}^{n} k$. Calculer S_{29}.

$S_{29} = \sum_{k=1}^{29} k = 1+2+3+\cdots+29$

On reconnait la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison 1.

On a donc : $S_{29} = \sum_{k=1}^{29} k = 1+2+3+\cdots+29 = \frac{(1+29)\times 29}{2} = \frac{30\times 29}{2} = \frac{30}{2}\times 29 = 15\times 29 = 435$

Réponse : $\boxed{S_1 = S_n + \frac{11}{6}}$

2. Soit la suite définie pour tout entier naturel n par $S_n = \sum_{k=1}^{n} 4^k$.

Calculer S_n. Donner une écriture sans notation $\sum$ sous forme réduite.

$S_n = 4^1 + 4^2 + 4^3 + \ldots 4^n$

On reconnait la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison 4.

On a donc : $S_n = 4^1 + 4^2 + 4^3 + \cdots + 4^n = 4^1 \times \frac{1-4^n}{1-4} = 4\times\frac{1-4^n}{-3} = \frac{4}{-3}\times(1-4^n) = \frac{-4}{3}\times(1-4^n)$

Réponse : $\boxed{S_n = \frac{-4}{3}\times(1-4^n)}$ ou $\boxed{S_n = \frac{4}{3}\times(4^n-1)}$

Exercice 7 Ecrire les somme suivantes à l'aide de la notation $\sum$:

1. $S = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{10}$

Réponse : $\boxed{S = \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k}}$

2. $S = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots + U_{18}$

Réponse : $\boxed{S = \sum_{k=0}^{18} U_k}$

3. $S = 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^{11}$

Réponse : $\boxed{S = \sum_{k=2}^{11} 2^k}$