Calculs préparatoires pour le raisonnement par récurrence

Exercice 1 Soit n un entier. Mettre sous la forme $a \times b^n$ avec a et b réels :

1. 3^{3n+1}

$3^{3n+1} = 3^{3n} \times 3 = \left(3^3\right)^n \times 3 = 27^n \times 3$

Réponse : $\boxed{3^{3n+1} = 3 \times 27^n}$

2. 5^{2n-1}

$5^{2n-1} = 5^{2n-1} \times 5^{-1} = \dfrac{5^{2n}}{5} = \dfrac{\left(5^2\right)^n}{5} = \dfrac{25^n}{5} = \dfrac{1}{5} \times 25^n$

Réponse : $\boxed{5^{2n-1} = \dfrac{1}{5} \times 25^n}$

3. $3 \times 2^{n+1}$

$3 \times 2^{n+1} = 3 \times 2^n \times 2 = 6 \times 2^n$

Réponse : $\boxed{(-1)^n \times 2^{n+1} = 6 \times 2^n}$

4. $\dfrac{2}{3^n}$

$\dfrac{2}{3^n} = 2 \times \dfrac{1}{3^n} = 2 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

Réponse : $\boxed{\dfrac{2}{3^n} = 2 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n}$

5. $\dfrac{5 \times 2^{3n}}{7^n}$

$\dfrac{5 \times 2^{3n}}{7^n} = \dfrac{5 \times \left(2^3\right)^n}{7^n} = \dfrac{5 \times 8^n}{7^n} = 5 \times \dfrac{8^n}{7^n} = 5 \times \left(\dfrac{8}{7}\right)^n$

Réponse : $\boxed{\dfrac{5 \times 2^{3n}}{7^n} = 5 \times \left(\dfrac{8}{7}\right)^n}$

6. $\dfrac{2^{n+1}}{5^{n-2}}$

$\dfrac{2^{n+1}}{5^{n-2}} = \dfrac{2^n \times 2}{5^n \times 5^{-2}} = \dfrac{2^n \times 2 \times 5^2}{5^n} = 50 \times \dfrac{2^n}{5^n}$

Réponse : $\boxed{\dfrac{2^{n+1}}{5^{n-2}} = 50 \times \left(\dfrac{2}{5}\right)^n}$

Exercice 2 Exprimer U_{n+1} en fonction de n dans les cas suivants :

1. Pour $n \geq 0$, $U_n = 2n^2 - 3$

Pour $n \geq 0$, $U_{n+1} = 2(n+1)^2 - 3 = 2(n^2 + 2n + 1) - 3 = 2n^2 + 4n + 2 - 3 = 2n^2 + 4n - 1$

Réponse : $\boxed{U_{n+1} = 2n^2 + 4n - 1}$

2. Pour $n \geq 0$, $U_n = 2^{2n-1}$

Pour $n \geq 0$, $U_{n+1} = 2^{2(n+1)-1} = 2^{2n+1}$

Réponse : $\boxed{U_{n+1} = 2^{2n+1}}$

3. Pour $n \geq 4$, $U_n = \dfrac{n-1}{3-n}$

Pour $n \geq 4$, $U_{n+1} = \dfrac{n+1-1}{3-(n+1)} = \dfrac{n}{2-n}$

Réponse : $\boxed{U_{n+1} = \dfrac{n}{2-n}}$

Exercice 3

1. Pour $n \geqslant 1$, soit $V_n = \dfrac{U_n}{\sqrt{U_n^2+1}}$. Pour $n \geqslant 1$, démontrer que si $U_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ alors $V_n = U_{n+1}$.

> Pour $n \geqslant 1$, si $U_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$
>
> alors $V_n = \dfrac{U_n}{\sqrt{U_n^2+1}} = \dfrac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2+1}} = \dfrac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{1}{n}+1}} = \dfrac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{n+1}{n}}} = \dfrac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}} = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \times \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$
>
> Or $U_{n+1} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$ donc $\boxed{V_n = U_{n+1}}$

2. Pour $n \geqslant 1$, soit $V_n = \dfrac{U_n}{1+U_n}$. Pour $n \geqslant 1$, démontrer que si $U_n = \dfrac{2}{2n+1}$ alors $V_n = U_{n+1}$.

> Pour $n \geqslant 1$, si $U_n = \dfrac{2}{2n+1}$ alors $V_n = \dfrac{U_n}{1+U_n} = \dfrac{\frac{2}{2n+1}}{1+\frac{2}{2n+1}} = \dfrac{\frac{2}{2n+1}}{\frac{2n+3}{2n+1}} = \dfrac{2}{2n+1} \times \dfrac{2n+1}{2n+3} = \boxed{\dfrac{2}{2n+3}}$
>
> Or pour $n \geqslant 1$, $U_{n+1} = \dfrac{2}{2(n+1)+1} = \boxed{\dfrac{2}{2n+3}}$ donc $\boxed{V_n = U_{n+1}}$

Exercice 4 Soit une suite (U_n) vérifiant pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = 2U_n - n - 1$

Pour tout entier naturel n, on note $\mathscr{P}(n)$ la proposition suivante : $U_n = 2(2^{n-1}+1)+n$.

Soit un entier naturel n, démontrer que si $\mathscr{P}(n)$ est vraie alors $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

> Soit $n \in \mathbb{N}$, on veut démontrer que si $U_n = 2(2^{n-1}+1)+n$ alors $U_{n+1} = 2(2^n+1)+n+1$.
>
> On a : $U_{n+1} = 2U_n - n - 1$
>
> donc si $U_n = 2(2^{n-1}+1)+n$ alors
>
> $U_{n+1} = 2\left[2(2^{n-1}+1)+n\right] - n - 1$
>
> $= 2\left[2^n+2+n\right] - n - 1$
>
> $= 2\left(2^n\right)+4+2n-n-1 = \boxed{2^{n+1}+n+3}$
>
> D'autre part :
>
> $2(2^n+1)+n+1 = 2^{n+1}+2+n+1$
>
> $= \boxed{2^{n+1}+n+3}$
>
> Conclusion : $\boxed{U_{n+1} = 2(2^n+1)+n+1}$

Exercice 5 Soit une suite (U_n) vérifiant pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = 10U_n + 21$

Pour tout entier naturel n, on note $\mathscr{P}(n)$ la proposition suivante : $3U_n = 10^{n+1} - 7$.

Soit un entier naturel n, démontrer que si $\mathscr{P}(n)$ est vraie alors $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

> Soit $n \in \mathbb{N}$, on veut démontrer que si $3U_n = 10^{n+1} - 7$ alors $3U_{n+1} = 10^{n+2} - 7$
>
> On a : $3U_{n+1} = 3(10U_n + 21) = 30U_n + 63$
>
> Si $3U_n = 10^{n+1} - 7$ alors $30U_n = 10\left(10^{n+1} - 7\right) = 10^{n+2} - 70$
>
> et donc $3U_{n+1} = 30U_n + 63 = 10^{n+2} - 70 + 63 = 10^{n+2} - 7$
>
> Conclusion : $\boxed{3U_{n+1} = 10^{n+2} - 7}$