Exercice 1

Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{4}{3^{n+1}}$

pour tout entier naturel n.

Démontrer que la suite (u_n) est géométrique.

Soit un entier naturel n,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{4}{3^{n+2}} \\ &= \frac{4}{3^{n+1} \times 3} \\ &= \frac{4}{3^{n+1}} \times \frac{1}{3} \\ &= u_n \times \frac{1}{3} \end{aligned}$$

donc (u_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$

Exercice 2

Soient les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ pour tout $n \geqslant 0$

$v_0 = 12$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3}$ pour tout $n \geqslant 0$

On pose $w_n = v_n - u_n$ pour tout $n \geqslant 0$.

Démontrer que (w_n) est géométrique.

Soit n entier naturel,

$$\begin{aligned} w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} &= \frac{u_n + 2v_n}{3} - \frac{u_n + v_n}{2} \\ &= \frac{2(u_n + 2v_n) - 3(u_n + v_n)}{6} \\ &= \frac{-u_n + v_n}{6} \\ &= \frac{1}{6}(v_n - u_n) \\ &= \frac{1}{6}w_n \end{aligned}$$

donc (w_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{6}$

Exercice 3

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 4$ et pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = 4u_n - 6$.

On pose $v_n = u_n - 2$ pour tout n entier naturel.

Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.

Soit un entier naturel n,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 2 \\ &= 4u_n - 6 - 2 \\ &= 4u_n - 8 \\ &= 4(u_n - 2) \\ &= 4v_n \end{aligned}$$

donc (v_n) est géométrique de raison 4

Exercice 4

Soit la suite (a_n) définie par : $a_0 = -1$

et $a_{n+2} = -a_{n+1} + 2a_n$ pour tout $n \geqslant 0$

On pose $u_n = -\dfrac{1}{3}a_{n+1} + \dfrac{1}{3}a_n$ pour tout $n \geqslant 0$.

Démontrer que la suite (u_n) est géométrique.

Soit un entier naturel n, $u_{n+1} = -\dfrac{1}{3}a_{n+2} + \dfrac{1}{3}a_{n+1}$

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{3}(-a_{n+1} + 2a_n) + \frac{1}{3}a_{n+1} \\ &= \frac{1}{3}a_{n+1} - \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}a_{n+1} \\ &= \frac{2}{3}a_{n+1} - \frac{2}{3}a_n \\ &= -2\left(-\frac{1}{3}a_{n+1} + \frac{1}{3}a_n\right) \\ &= -2u_n \end{aligned}$$

donc (u_n) est géométrique de raison -2