

09/10/25

Ex 1 $U_1 = 0 \quad \forall n \geq 1 \quad U_{n+1} = \frac{nU_n + 4}{n+1}$

1 a) $U_2 = \frac{U_1 + 4}{1+1} = \frac{4}{2} = 2$

$U_3 = \frac{2U_2 + 4}{2+1} = \frac{8}{3}$

b) $U_2 - U_1 = 2 - 0 = 2$

$U_3 - U_2 = \frac{8}{3} - 2 = \frac{2}{3}$

$\left\{ \begin{array}{l} U_2 - U_1 \neq U_3 - U_2 \\ \text{donc } (U_n) \text{ n'est pas} \\ \text{arithmétique.} \end{array} \right.$

2) Pour $n \geq 1 \quad V_n = nU_n$

a) $\forall n \geq 1 \quad V_{n+1} = (n+1)U_{n+1}$

$= nU_n + 4$

$V_{n+1} = V_n + 4$

ou $V_{n+1} - V_n$

$= (n+1)U_{n+1} - nU_n$

$= nU_n + 4 - nU_n$

$= 4$

donc (V_n) est arithmétique de raison 4. de 1^{er} terme

$V_1 = 0$

b) $\forall n \geq 1 \quad V_n = V_1 + (n-1) \times 4$

$V_n = 0 + (n-1) \times 4$

$V_n = 4n - 4$

$(V_1 = 1 \times U_1)$

$\forall n \geq 1 \quad V_n = nU_n \text{ donc } U_n = \frac{V_n}{n}$

donc $U_n = \frac{4n-4}{n}$

$U_n = 4 - \frac{4}{n}$

c) $S_n = \sum_{k=1}^n V_k = V_1 + V_2 + \dots + V_n$

$= \frac{(V_1 + V_n) \times n}{2}$

$= \frac{(4n-4) \times n}{2}$

$= \frac{2(2n-2) \times n}{2}$

$S_n = (2n-2)n$

car S_n est la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique

ou $S_n = 2n^2 - 2n$

d) $U_1 + 2U_2 + 3U_3 + \dots + 20U_{20} = \sum_{k=1}^{20} kU_k$
 $= \sum_{k=1}^{20} V_k$
 $= S_{20}$
 $= (2 \times 20 - 2) \times 20$
 $= 38 \times 20$
 $= 760$

Ex 2 $a_0 = 1 \quad \forall n \geq 0 \quad a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{2}{3}n + 1$

1) Démontrer par récurrence : $\forall n \geq 0 \quad a_n > n$. (noté $P(n)$)

① Initialisation:

Pour $n=0 \quad a_n = a_0 = 1$ donc $a_0 > 0$
 $n=0$ donc $P(n)$ vrai pour $n=0$.

② Hérédité:

Pour $n \geq 0$, on va démontrer que si $P(n)$ est vrai alors $P(n+1)$ est vraie.

donc on va démontrer que si $a_n > n$ alors $a_{n+1} > n+1$

D'après l'énoncé $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{2}{3}n + 1$

Si $a_n > n$

alors $\frac{1}{3}a_n > \frac{1}{3}n \quad \left) \times \frac{1}{3} \text{ positif}$

et $\frac{1}{3}a_n + \frac{2}{3}n + 1 > \frac{1}{3}n + \frac{2}{3}n + 1$

donc $a_{n+1} > n+1 \quad \text{CQFD}$

③ Conclusion:

D'après le principe de raisonnement par récurrence.

pour tout $n \geq 0 \quad a_n > n$

2) $\forall n \geq 0 \quad b_n = a_n - n$

a) $b_{n+1} - b_n = a_{n+1} - (n+1) - (a_n - n)$

$= a_{n+1} - n - 1 - a_n + n =$

$= \frac{1}{3}a_n + \frac{2}{3}n + 1 - 1 - a_n = -\frac{2}{3}a_n + \frac{2}{3}n$

$= \frac{2}{3}(-a_n + n)$

b) D'après a) $\forall n \geq 0$ $a_n > n$ donc $n - a_n < 0$
donc $b_{n+1} - b_n < 0$.
donc (b_n) est décroissante donc $b_{n+1} < b_n$

Ex 3

- 1) f est concave quand f'' est négative donc sur $[-5; 3]$
- 2) C_f admet des points d'inflexion quand f'' s'annule en changeant de signe donc C_f a un point d'inflexion au point d'abscisse 3.