

Sujet 2 Rahin

Ex 1

1) Sur $]0, +\infty[$ $f(x) = \frac{5}{4x+3x^2} = 5 \times \frac{1}{4x+3x^2}$

donc $f = 5 \times \frac{1}{u}$
 donc $f' = 5 \times \frac{-u'}{u^2}$

donc $f'(x) = 5 \times \frac{-(4+6x)}{(4x+3x^2)^2}$

$f'(x) = \frac{-5(4+6x)}{(4x+3x^2)^2}$

2) Sur $\mathbb{R}^*$ $h(x) = \left(\frac{1}{x} + 2\right)^3$ | $h = u^3$
 $h' = 3u^2 \times u'$

donc $h'(x) = 3\left(\frac{1}{x} + 2\right)^2 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right)$

$h'(x) = -\frac{3}{x^2} \left(\frac{1}{x} + 2\right)^2$

Ex 2

1) Sur $\mathbb{R}$ $f(x) = \frac{3x^2}{2} - x + 2$

$F(x) = \frac{3}{2} \times \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x + C$ avec $C \in \mathbb{R}$

$F(x) = \frac{x^3}{2} - \frac{x^2}{2} + 2x + C$

$F(-1) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 2 + C$

$F(-1) = -1 - 2 + C = -3 + C$

donc $F(-1) = 3$

$\Leftrightarrow -3 + C = 3$

$\Leftrightarrow C = 6$

Conclusion:

$F(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x + 6$

2) Sur $]0, +\infty[$ $g(x) = x^2 - x\sqrt{x}$ $h(x) = 2x - \frac{3}{2}\sqrt{x}$
 On a $g'(x) = 2x - \left(1 \times \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$ | $g = u - v \times w$
 $g'(x) = 2x - \left(\sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}}\right)$ | $g' = u' - (vw)'$
 $g'(x) = 2x - \sqrt{x} - \frac{\sqrt{x}}{2} = 2x - \frac{3}{2}\sqrt{x}$

donc $\forall x > 0$ $g'(x) = h(x)$

donc g est une primitive de h

3) Sur $\mathbb{R}$ $u = e^x(x^2 - 2)$ $p(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$

On a $p'(x) = (2ax + b)e^x + (ax^2 + bx + c)e^x$

$p'(x) = e^x(2ax + b + ax^2 + bx + c)$

$p'(x) = e^x(ax^2 + (2a+b)x + b+c)$

p est une primitive de u

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad p'(x) = u(x)$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad ax^2 + (2a+b)x + b+c = x^2 - 2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ 2a + b = 0 \\ b + c = -2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ 2 + b = 0 \\ b + c = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 0 \end{cases}$

Conclusion $p(x) = (x^2 - 2x)e^x$

Ex 3 $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{\sin(x)}{x} \quad \left| \quad f = \frac{u}{v} \right.$
 $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \frac{\cos(x) \times x - \sin(x) \times 1}{x^2} \quad \left| \quad \text{donc } f' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \right.$
 $f'(x) = \frac{x \cos(x) - \sin(x)}{x^2}$
 $f'(x) + \frac{1}{x} f(x) = \frac{x \cos(x) - \sin(x)}{x^2} + \frac{1}{x} \times \frac{\sin(x)}{x}$
 $= \frac{x \cos(x)}{x^2}$
 $= \frac{\cos(x)}{x}$
 donc f est solution de $y' + \frac{1}{x} y = \frac{\cos(x)}{x}$.

Ex 4
 1) * $A(5, -8) \in \mathcal{B}_f$ donc $f(5) = -8$
 * la tangente en A a pour équation $y = -x - 3$
 donc $f'(5) = -1$ car $f'(5)$ est le coefficient directeur de la tangente en A
 * $A(5, -8)$ est un point d'inflexion donc $f''(5) = 0$
 2) a) A est l'unique point d'inflexion et f est convexe sur $] -\infty, 5]$ donc f est convexe sur $] -\infty, 5]$ et change de convexité en A donc f est concave sur $] 5, +\infty[$
 b) Sur $] 7, +\infty[$ f est concave donc f' est décroissante
 on a $8 \leq 9$ donc $f'(8) > f'(9)$