

Ex 1

1 a) Sur $\mathbb{R}$ $f(x) = \frac{3}{2+3x^4}$

$$f'(x) = 3 \times \frac{-12x^3}{(2+3x^4)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-36x^3}{(2+3x^4)^2}$$

$$f = 3 \times \frac{1}{u} \quad f' = 3 \times -\frac{u'}{u^2}$$

b) $\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = \sin(x) - x \cos(x) \quad \left| \begin{array}{l} g = f - uv \\ g' = f' - (uv)' \\ g' = f' - (u'v + uv') \end{array} \right.$

$$g'(x) = \cos(x) - (1 \times \cos(x) + x(-\sin(x)))$$

$$g'(x) = \cos(x) - (\cos(x) - x \sin(x))$$

$$g'(x) = x \sin(x)$$

2) $\forall x > 0 \quad f(x) = \frac{3}{4\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}$

$$F(x) = \frac{3}{4} \times 2\sqrt{x} - \frac{1}{x} + C \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

$$F(4) = \frac{3}{2}\sqrt{4} - \frac{1}{4} + C = 3 - \frac{1}{4} + C = \frac{11}{4} + C$$

donc $F(4) = 3$

$$\Leftrightarrow \frac{11}{4} + C = 3$$

$$\Leftrightarrow C = 3 - \frac{11}{4}$$

$$\Leftrightarrow C = -\frac{1}{4}$$

Conclusion: $F(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{x} + \frac{1}{4}$

Ex 2

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = x^2 - \frac{x}{3} + 2$

1) Une tangente au point d'abscisse x a pour coefficient directeur $f'(x)$

la droite (d) d'équation $y = 2x - 4$ a pour coefficient directeur 2

Deux droites sont parallèles si et seulement si elles ont le même coefficient directeur

$\Rightarrow$ Action $f'(x) = 2$?

$$f'(x) = 2 \Leftrightarrow x^2 - \frac{x}{3} + 2 = 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - \frac{x}{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x - \frac{1}{3}) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{1}{3}$$

$ax^2 + bx + c = 0$
avec $c = 0$
 Δ

Il existe deux tangentes parallèles à (d) qui sont les tangentes aux points d'abscisse 0 et $\frac{1}{3}$

2) $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = x^2 - \frac{x}{3} + 2$

donc $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3} \times \frac{x^2}{2} + 2x + C$ avec $C \in \mathbb{R}$

$A(2, 1) \in \mathcal{C}_f$ donc $f(2) = 1$

ou $f(2) = \frac{2^3}{3} - \frac{1}{3} \times \frac{2^2}{2} + 4 + C$

$$f(2) = \frac{8}{3} - \frac{2}{3} + 4 + C$$

$$f(2) = 6 + C$$

donc $f(2) = 1$

$$\Leftrightarrow 6 + C = 1$$

$$\Leftrightarrow C = -5$$

Conclusion

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{6}x^2 + 2x - 5$$

Ex3 $f(1) = 21e$ $f''(x) = e^x(3x^2 - 4x)$
 $f'(1) = 3e$

1) Equation de la tangente au point d'abscisse 1.

$$y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

$$y = 3e(x-1) + 21e$$

$$y = 3ex - 3e + 21e$$

$$y = 3ex + 18e$$

2) Signe de $f''(x)$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x > 0$ donc on étudie le signe de $3x^2 - 4x$.

Racines? $(ax^2 + bx + c \text{ avec } c=0)$
 $3x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(3x-4) = 0$
 $a=3 \quad a>0 \quad \Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x=\frac{4}{3}$

x	$-\infty$	0	1	$4/3$	2	$+\infty$
$3x^2 - 4x$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$

Donc f'' est négative sur $[0; \frac{4}{3}]$

donc f est concave sur $[0; \frac{4}{3}]$

3) Sur $[1, \frac{4}{3}]$ f est concave donc Γ_f est en-dessous de ses tangentes donc Γ_f est en-dessous de (Δ)

On a donc: $\forall x \in [1, \frac{4}{3}]$

$$f(x) \leq 3ex + 18e$$

Sur $[\frac{4}{3}; 2]$ f est convexe donc Γ_f est au-dessus

de (Δ) donc: $\forall x \in [\frac{4}{3}; 2] \quad f(x) \geq 3ex + 18e$