

Calcul Dérivées n°3 - Correction

Déterminer la fonction dérivée f' de f

Donner le résultat sous forme réduite et sous forme factorisée quand c'est possible.

1. Sur $]0; +\infty[$ $f(x) = (x + \sqrt{x})^4$

$$f'(x) = 4(x + \sqrt{x})^3 \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

Formule : $(u^4)' = 4u^3 \times u'$

avec $u(x) = x + \sqrt{x}$

$$u'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

2. Sur $\mathbb{R}$ $f(x) = x^2 e^{3x}$

$$f'(x) = 2xe^{3x} + x^2 e^{3x} \times 3$$

$$f'(x) = e^{3x} (2x + 3x^2)$$

Formule : $(uv)' = u'v + uv'$

avec $u(x) = x^2$ et $v(x) = e^{3x}$

Formule : $(e^u)' = e^u \times u'$

$$v'(x) = e^{3x} \times 3$$

3. Sur $\mathbb{R}$ $f(x) = 5x \cos^2(x)$

$$f'(x) = 5 \cos^2(x) + 5x \times 2 \cos(x) (-\sin(x))$$

$$f'(x) = 5 \cos^2(x) - 10x \cos(x) \sin(x)$$

$$f'(x) = \cos(x) (5 \cos(x) - 10x \sin(x))$$

Formule : $(uv)' = u'v + uv'$

avec $u(x) = 5x$ et $v(x) = \cos^2(x)$

Formule : $(u^2)' = 2u \times u'$

$$v'(x) = 2 \cos(x) \times (-\sin(x))$$

4. Sur $\mathbb{R}$ $f(x) = \frac{1}{e^{-x} + e^{2x}}$

$$f'(x) = \frac{-(-e^{-x} + 2e^{2x})}{(e^{-x} + e^{2x})^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^{-x} - 2e^{2x}}{(e^{-x} + e^{2x})^2}$$

Formule : $\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2}$

avec $u(x) = e^{-x} + e^{2x}$

Formule : $(e^u)' = e^u \times u' = u' e^u$

$$u'(x) = e^{-x} \times (-1) + e^{2x} \times 2 = -e^{-x} + 2e^{2x}$$

Remarque on peut factoriser par e^{2x} :

$$f'(x) = \frac{e^{2x} (e^{-3x} - 2)}{(e^{-x} + e^{2x})^2}$$

ou on peut factoriser par e^{-x} :

$$f'(x) = \frac{e^{-x} (1 - 2e^{3x})}{(e^{-x} + e^{2x})^2}$$

5. Sur $\mathbb{R}$ $f(x) = \sqrt{\sin^2(x) + 1}$

$$f'(x) = \frac{2 \sin(x) \cos(x)}{2\sqrt{\sin^2(x) + 1}}$$

$$f'(x) = \frac{\sin(x) \cos(x)}{\sqrt{\sin^2(x) + 1}}$$

Formule : $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \times u' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

avec $u(x) = \sin^2(x) + 1$

Formule : $(u^2)' = 2u \times u'$

$$u'(x) = 2 \sin(x) \times \cos(x)$$

6. Sur $\mathbb{R}^*$ $f(x) = \frac{\sin^3(x)}{2x}$

$$f'(x) = \frac{3\sin^2(x)\cos(x) \times 2x - \sin^3(x) \times 2}{(2x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{6x\sin^2(x)\cos(x) - 2\sin^3(x)}{(2x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\sin^2(x)(6x\cos(x) - 2\sin(x))}{4x^2}$$

Formule : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

avec $u(x) = \sin^3(x)$ et $v(x) = 2x$

Formule : $(u^3)' = 3u^2 \times u'$

$u'(x) = 3\sin^2(x) \times \cos(x)$

7. Sur $\mathbb{R}^*$ $f(x) = \frac{(1-x)^3}{4x^2}$

$$f'(x) = \frac{3(1-x)^2 \times (-1) \times 4x^2 - (1-x)^3 \times 8x}{(4x^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-12x^2(1-x)^2 - 8x(1-x)^3}{16x^4}$$

$$f'(x) = \frac{(1-x)^2(-12x^2 - 8x(1-x))}{16x^4}$$

$$f'(x) = \frac{(1-x)^2(-12x^2 - 8x + 8x^2)}{16x^4}$$

$$f'(x) = \frac{(1-x)^2(-4x^2 - 8x)}{16x^4}$$

Formule : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

avec $u(x) = (1-x)^3$ et $v(x) = 4x^2$

Formule : $(u^3)' = 3u^2 \times u'$

$u'(x) = 3(1-x)^2 \times (-1)$

8. Sur $\mathbb{R}$ $f(x) = x^3\sqrt{6x^2+1}$

$$f'(x) = 3x^2\sqrt{6x^2+1} + x^3 \times \frac{12x}{2\sqrt{6x^2+1}}$$

$$f'(x) = 3x^2\sqrt{6x^2+1} + \frac{6x^4}{\sqrt{6x^2+1}}$$

$$f'(x) = \frac{3x^2\sqrt{6x^2+1} \times \sqrt{6x^2+1}}{\sqrt{6x^2+1}} + \frac{6x^4}{\sqrt{6x^2+1}}$$

$$f'(x) = \frac{3x^2(6x^2+1)}{\sqrt{6x^2+1}} + \frac{6x^4}{\sqrt{6x^2+1}}$$

$$f'(x) = \frac{18x^4 + 3x^2 + 6x^4}{\sqrt{6x^2+1}}$$

$$f'(x) = \frac{24x^4 + 3x^2}{\sqrt{6x^2+1}}$$

$$f'(x) = \frac{3x^2(8x^2+1)}{\sqrt{6x^2+1}}$$

Formule : $(uv)' = u'v + uv'$

avec $u(x) = x^3$ et $v(x) = \sqrt{6x^2+1}$

Formule : $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \times u' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

$u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{6x^2+1}} \times 12x = \frac{12x}{2\sqrt{6x^2+1}}$