

(1 heure - Calculatrice interdite)

Exercice 1

3 points

Les questions 1. et 2. sont indépendantes.

1. Soit l'équation différentielle $(E_1) \quad y' = 3y + 5$

Déterminer la solution f dont la représentation graphique $\mathcal{C}_f$ passe par le point $A(0; 2)$.

2. Soit l'équation différentielle $(E_2) \quad y' = 3y + 5x$.

Déterminer une fonction affine solution de (E_2) .

Exercice 2

4,5 points

On considère l'équation différentielle : $(E) \quad y' + y = \frac{x^2}{2}e^{-x}$

On fait l'hypothèse que deux fonctions g et h , définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, vérifient, pour tout x réel : $g(x) = h(x)e^{-x}$.

1.
 - a. Montrer que g est solution de (E) si et seulement si, pour tout x réel, $h'(x) = \frac{x^2}{2}$
 - b. Déterminer la fonction h sachant que $h(0) = 0$.
 - c. En déduire la fonction g .
2.
 - a. Résoudre $y' + y = 0$
 - b. En déduire les solutions de l'équation (E) .

Exercice 3

4,5 points

On considère une fonction f qui vérifie les conditions suivantes :

- f est solution de l'équation différentielle $y' = \frac{1}{2}y(4 - y)$.
- $f(0) = 2$
- f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$
- f est croissante sur $\mathbb{R}$.

1. Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.
2. Démontrer que pour tout x de $\mathbb{R}$, on a $f''(x) = \frac{1}{2}f'(x)(4 - 2f(x))$.
3. Quelle est la convexité de f quand $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de la droite (d) d'équation $y = 2$?

Justifier votre réponse.