

(1h15 - Calculatrice interdite)

Exercice 1

7 points

Soit une fonction f définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x , $f''(x) = 6x^2 - 4x$.

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f .

La tangente (T) à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1 a pour équation $y = 2x - 1$.

1. Déterminer la convexité de f sur $\mathbb{R}$.
2.
 - a. Préciser la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à (T) sur $[1; +\infty[$.
 - b. Traduire ceci à l'aide d'une inégalité.
3.
 - a. Que vaut $f'(1)$? Justifier.
 - b. En déduire l'expression de $f'(x)$.
4.
 - a. Que vaut $f(1)$? Justifier.
 - b. En déduire l'expression de $f(x)$.

Exercice 2

4 points

On considère l'équation différentielle : (E) $y' = 2y(3 - y)$

On suppose qu'il existe une fonction f solution de (E) qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et qui vérifie $f(0) = 4$

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

1. Démontrer que g est solution de $y' = -6y + 2$ (E')
2. Résoudre (E')
3. En déduire une expression de la fonction g puis de la fonction f .

Exercice 3

4 points

Soit l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = xe^{-3x}$.

1. Résoudre l'équation différentielle (E') : $y' + 2y = 0$.
2. Déterminer les réels a et b tels que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (ax + b)e^{-3x}$ soit solution de (E).
3. En déduire les solutions de (E).