Ex 1 1) (E_1) $y' = 3y + 5$

Les solutions sont les fonctions de la forme

$y(x) = Ce^{3x} - \frac{5}{3}$ avec $C \in \mathbb{R}$

f est solution de (E_1) donc $f(x) = Ce^{3x} - \frac{5}{3}$

$\mathcal{C}_f$ passe par $A(0,2)$ donc $f(0) = 2$

donc $Ce^{0} - \frac{5}{3} = 2$

donc $C = 2 + \frac{5}{3} = \frac{11}{3}$

Conclusion : $\boxed{f(x) = \frac{11}{3} e^{3x} - \frac{5}{3}}$

2) (E_2) $y' = 3y + 5x$

On cherche deux réels a et b tels que la fonction g définie par $g(x) = ax + b$ soit solution de (E_2)

g solution de (E_2) $\iff g'(x) = 3g(x) + 5x$

$\iff a = 3(ax + b) + 5x$

$\iff a = 3ax + 3b + 5x$

$\iff a = (3a+5)x + 3b.$

$\iff \begin{cases} 3a + 5 = 0 \\ 3b = a \end{cases}$

$\iff \begin{cases} a = -\frac{5}{3} \\ b = \frac{a}{3} \end{cases}$

$\iff \begin{cases} a = -\frac{5}{3} \\ b = -\frac{5}{9} \end{cases}$

Conclusion $\boxed{g(x) = -\frac{5}{3}x - \frac{5}{9}}$

Ex 2 $y' + y = \frac{x^2}{2} e^{-x}$ $\qquad g(x) = h(x)e^{-x}$ pour $x \in \mathbb{R}$

1 a) g solution de (E) $\iff g'(x) + g(x) = \frac{x^2}{2} e^{-x}$

On a $g'(x) = h'(x)e^{-x} + h(x) \times e^{-x} \times (-1)$

$g'(x) = e^{-x}(h'(x) - h(x))$

donc g solution de (E) $\iff e^{-x}(h'(x) - h(x)) + h(x)e^{-x} = \frac{x^2}{2} e^{-x}$

$\iff e^{-x} h'(x) = \frac{x^2}{2} e^{-x}$

$\iff h'(x) = \frac{x^2}{2}$ car $\forall x \in \mathbb{R}$ $e^{-x} \neq 0$

b) $h'(x) = \frac{x^2}{2}$ donc $h(x) = \frac{1}{2} \times \frac{x^3}{3} + C$ avec $C \in \mathbb{R}$

On a $h(0) = 0$ donc $\frac{1}{2} \times 0 + C = 0$

donc $C = 0$

et donc $\boxed{h(x) = \frac{x^3}{6}}$

c) $\forall x \in \mathbb{R}$ $g(x) = h(x)e^{-x}$ donc $\boxed{g(x) = \frac{x^3}{6} e^{-x}}$

2a) $y' + y = 0 \iff y' = -y$

Les solutions sont les fonctions de la forme $y(x) = Ce^{-x}$ avec $C \in \mathbb{R}$

b) Les solutions de $y' + y = \frac{x^2}{2} e^{-x}$ sont obtenues par addition des solutions de $y' + y = 0$ et d'une solution particulière de $y' + y = \frac{x^2}{2} e^{-x}$

donc les solutions sont les fonctions de la forme

$y(x) = Ce^{-x} + g(x)$

$\boxed{y(x) = Ce^{-x} + \frac{x^3}{6} e^{-x}}$ avec $C \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{Ex 3}}$ 1) f est solution de $y' = \frac{1}{2}y(4-y)$

donc $\forall x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = \frac{1}{2}f(x)(4-f(x))$

donc $f'(0) = \frac{1}{2}f(0)(4-f(0))$

$= \frac{1}{2} \times 2(4-2) = 2$

$\boxed{f'(0) = 2}$

La tangente au point d'abscisse 0 a pour équation $y = f'(0)x + f(0)$ avec $f(0) = 2$

donc $\boxed{y = 2x + 2}$

2) $\forall x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = \frac{1}{2}f(x)(4-f(x))$

donc $f''(x) = \frac{1}{2}f'(x)(4-f(x)) + \frac{1}{2}f(x)(-f'(x))$

$= \frac{1}{2}f'(x)(4-f(x)-f(x))$

$= \frac{1}{2}f'(x)(4-2f(x))$

3) Le signe de f'' donne la convexité de f.

On sait que f est croissante sur $\mathbb{R}$ donc pour tout x de $\mathbb{R}$ $f'(x) \geqslant 0$.

Le signe de f'' dépend du signe de $4-2f(x)$

Si $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de la droite d'équation $y=2$

alors $f(x) \geqslant 2$

donc $-2f(x) \leqslant -4$

et $4-2f(x) \leqslant 0$

donc $f''(x) \leqslant 0$

donc f est concave quand $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de (d)