Ex 1 $\forall x \in \mathbb{R} \quad f''(x) = 6x^2 - 4x$

1) On étudie le signe de $f''(x)$ pour déterminer la convexité de f sur $\mathbb{R}$

$6x^2 - 4x = 0$ $\quad (ax^2+bx+c$ avec $c=0)$

$\iff x(6x-4)=0$

$\iff x = 0$ ou $x = \frac{2}{3}$ $\quad$ | 2 racines 0 et $\frac{2}{3}$

$a = 3 \quad a > 0$

x	$-\infty$		0		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

donc f est convexe sur $]-\infty, 0]$ et sur $[\frac{2}{3}; +\infty[$

f est concave sur $[0; \frac{2}{3}]$

2) a) Sur $[1,+\infty[$ f est convexe donc $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de ses tangentes donc au-dessus de (T)

b) On a donc : $\forall x \in [1,+\infty[\quad f(x) \geq 2x-1$

3 a) la tangente au point d'abscisse 1 a pour équation $y=2x-1$

donc $f'(1) = \text{coeff}(T)$ donc $\boxed{f'(1) = 2}$

b) $\forall x \in \mathbb{R} \quad f''(x) = 6x^2 - 4x$

donc $f'(x) = 6 \times \frac{x^3}{3} - 4 \times \frac{x^2}{2} + c$ avec $c \in \mathbb{R}$

$f'(x) = 2x^3 - 2x^2 + c$

On a $f'(1) = 2$ donc $2 - 2 + c = 2$

$\iff c = 2$

donc $\boxed{f'(x) = 2x^3 - 2x^2 + 2}$

c) le point $A(1, f(1))$ appartient à $\mathcal{C}_f$ et à (T)

donc ses coordonnées vérifient l'équation de (T) $y=2x-1$

donc $f(1) = 2\times1-1 = 1$ donc $\boxed{f(1) = 1}$

On a $f(x) = 2\times\frac{x^4}{4} - 2\times\frac{x^3}{3} + 2x + c$ avec $c \in \mathbb{R}$

et $f(1) = 1$ donc $\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + 2 + c = 1$

donc $c = -1 - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{-6-3+4}{6} = \frac{-5}{6}$.

Conclusion $\boxed{f(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 2x - \frac{5}{6}}$

Ex 2 $(E) \quad y' = 2y(3-y)$

f solution de E qui ne s'annule pas et $f(0) = 4$

On pose $\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = \frac{1}{f(x)}$

1) $g'(x) = \frac{-f'(x)}{(f(x))^2}$

$= \frac{-2f(x)(3-f(x))}{(f(x))^2}$ car f solution de (E)

$= \frac{-2(3-f(x))}{f(x)} = \frac{-6+2f(x)}{f(x)}$

$= -\frac{6}{f(x)} + 2 = -6g(x) + 2$

donc g est solution de $y' = -6y + 2$

2) les solutions de $y' = -6y + 2$ sont les fonctions de la forme $y(x) = Ce^{-6x} - \frac{2}{-6}$

$\boxed{y(x) = Ce^{-6x} + \frac{1}{3}}$ avec $C \in \mathbb{R}$

3) g est solution de (E) donc $g(x) = Ce^{-6x} + \frac{1}{3}$

On a $f(0) = 4$ donc $g(0) = \frac{1}{f(0)} = \frac{1}{4}$

donc $Ce^0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$

donc $C = \frac{1}{4} - \frac{1}{3}$ donc $C = \frac{-1}{12}$

donc $g(x) = -\frac{1}{12}e^{-6x} + \frac{1}{3} = \frac{-e^{-6x}+4}{12}$

On a : $f(x) = \frac{1}{g(x)}$

donc $\boxed{f(x) = \frac{12}{4 - e^{-6x}}}$

Ex 3 2) $g(x) = (ax+b)e^{-3x}$

g est solution de $y' + 2y = xe^{-3x}$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad g'(x) + 2g(x) = xe^{-3x}$

On a $g'(x) = ae^{-3x} + (ax+b)e^{-3x} \times (-3)$

$g'(x) = e^{-3x}(a - 3(ax+b))$

$g'(x) = e^{-3x}(a - 3ax - 3b)$

donc g sol^{n} de (E) $\Leftrightarrow e^{-3x}(a-3ax-3b) + 2(ax+b)e^{-3x} = xe^{-3x}$

$\Leftrightarrow e^{-3x}(a - 3ax - 3b + 2ax + 2b) = xe^{-3x}$

$\Leftrightarrow -ax + a - b = x$ | car $\forall x$ $e^{-3x} \neq 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -a = 1 \\ a - b = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \end{cases}$

Conclusion : $\boxed{g(x) = (-x-1)e^{-3x}}$

1) $y' + 2y = 0 \Leftrightarrow y' = -2y$

Les solutions sont les fonctions de la forme

$\boxed{y(x) = Ce^{-2x}}$ avec $C \in \mathbb{R}$

3) Les solutions de $y' + 2y = xe^{-3x}$ sont les fonctions de la forme $y(x) = Ce^{-2x} + g(x)$

$\boxed{y(x) = Ce^{-2x} + (-x-1)e^{-3x}}$ $C \in \mathbb{R}$

(Somme des solutions de $y' + 2y = 0$ et d'une solution particulière de $y' + 2y = xe^{-3x}$)