Equations différentielles - Correction

Ex 1

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ $\quad y' = -5y$

Les solutions sont les fonctions de la forme $\boxed{y(x) = C\mathrm{e}^{-5x}}$ avec $C \in \mathbb{R}$

Cette équation différentielle est de la forme $y' = ay$ donc les solutions sont les fonctions de la forme $y(x) = C\mathrm{e}^{ax}$ avec $C \in \mathbb{R}$

2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ $\quad 2y' + 3y = 0$

On a : $2y' + 3y = 0 \Longleftrightarrow 2y' = -3y \Longleftrightarrow y' = -\dfrac{3}{2}y$

Les solutions sont les fonctions de la forme $\boxed{y(x) = C\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}x}}$ avec $C \in \mathbb{R}$

La dernière équation différentielle est de la forme $y' = ay$ donc les solutions sont les fonctions de la forme $y(x) = C\mathrm{e}^{ax}$ avec $C \in \mathbb{R}$

3. Résoudre sur $\mathbb{R}$ $\quad 4y' - y = 0 \quad$ avec $\quad y(0) = 6$

① On cherche toutes les solutions de $4y' - y = 0$.

On a : $\quad 4y' - y = 0 \Longleftrightarrow 4y' = y \Longleftrightarrow y' = \dfrac{1}{4}y$

Les solutions sont les fonctions de la forme $\boxed{y(x) = C\mathrm{e}^{\frac{1}{4}x}}$ avec $C \in \mathbb{R}$

La dernière équation différentielle est de la forme $y' = ay$ donc les solutions sont les fonctions de la forme $y(x) = C\mathrm{e}^{ax}$ avec $C \in \mathbb{R}$

② On cherche ensuite la solution qui vérifie $y(0) = 6$.

On cherche donc la valeur de C qui convient.

On a : $\quad y(0) = 6 \Longleftrightarrow C\mathrm{e}^{0} = 6 \Longleftrightarrow C = 6$

et donc la solution cherchée est $\boxed{y(x) = 6\mathrm{e}^{\frac{1}{4}x}}$

4. Résoudre sur $\mathbb{R}$ $\quad y' = 7y + 5$

Les solutions sont les fonctions de la forme $\boxed{y(x) = C\mathrm{e}^{7x} - \dfrac{5}{7}}$ avec $C \in \mathbb{R}$

L'équation différentielle est de la forme $y' = ay + b$ donc les solutions sont les fonctions de la forme $y(x) = C\mathrm{e}^{ax} - \dfrac{b}{a}$ avec $C \in \mathbb{R}$

5. Résoudre sur $\mathbb{R}$ $\quad 3y' - 2y = 1$

On a : $\quad 3y' - 2y = 1 \Longleftrightarrow 3y' = 2y + 1 \Longleftrightarrow y' = \dfrac{2}{3}y + \dfrac{1}{3}$

donc les solutions sont les fonctions de la forme

$y(x) = C\mathrm{e}^{\frac{2}{3}x} - \dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}$ soit $\boxed{y(x) = C\mathrm{e}^{\frac{2}{3}x} - \dfrac{1}{2}}$ avec $C \in \mathbb{R}$

La dernière équation différentielle est de la forme $y' = ay + b$ donc les solutions sont les fonctions de la forme $y(x) = C\mathrm{e}^{ax} - \dfrac{b}{a}$ avec $C \in \mathbb{R}$

6. Résoudre sur $\mathbb{R}$ $\quad 5y'+3y=4 \quad$ avec $\quad y(5)=0$

① On commence par chercher toutes les solutions de $5y'+3y=4$.

On a : $\quad 5y'+3y=4 \Longleftrightarrow 5y'=-3y+4 \Longleftrightarrow y'=-\dfrac{3}{5}y+\dfrac{4}{5}$

donc les solutions sont les fonctions de la forme

$y(x)=C\mathrm{e}^{-\frac{3}{5}x}-\dfrac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}$ avec $C\in\mathbb{R}$

soit $\boxed{y(x)=C\mathrm{e}^{-\frac{3}{5}x}+\dfrac{4}{3}}$ avec $C\in\mathbb{R}$

② On cherche ensuite la solution qui vérifie $y(5)=0$.

On cherche donc la valeur de C qui convient.

On a : $\quad y(5)=0 \Longleftrightarrow C\mathrm{e}^{-\frac{3}{5}\times 5}+\dfrac{4}{3}=0$

$\Longleftrightarrow C\mathrm{e}^{-3}+\dfrac{4}{3}=0$

$\Longleftrightarrow C\mathrm{e}^{-3}=-\dfrac{4}{3}$

$\Longleftrightarrow C=-\dfrac{4}{3}\mathrm{e}^{3}$

et donc la solution cherchée est $\boxed{y(x)=-\dfrac{4}{3}\mathrm{e}^{3}\mathrm{e}^{-\frac{3}{5}x}+\dfrac{4}{3}}$

La dernière équation différentielle est de la forme $y'=ay+b$ donc les solutions sont les fonctions de la forme $y(x)=C\mathrm{e}^{ax}-\dfrac{b}{a}$ avec $C\in\mathbb{R}$

Ex 2

La fonction v vérifie la relation $10v'(t)+v(t)=30$ donc v est une solution de l'équation différentielle $10y'+y=30$.

On sait de plus que $v(0)=0$.

① On commence par chercher toutes les solutions de $10y'+y=30$.

On a : $\quad 10y'+y=30 \Longleftrightarrow 10y'=-y+30 \Longleftrightarrow y'=-\dfrac{1}{10}y+\dfrac{30}{10} \Longleftrightarrow y'=-\dfrac{1}{10}y+3$

Les solutions sont les fonctions de la forme $y(t)=C\mathrm{e}^{-\frac{1}{10}t}-\dfrac{3}{-\frac{1}{10}}$ donc $\boxed{y(t)=C\mathrm{e}^{-\frac{1}{10}t}+30}$ avec $C\in\mathbb{R}$

② v est une solution donc il existe une constante C telle que $\boxed{v(t)=C\mathrm{e}^{-\frac{1}{10}t}+30}$.

③ On cherche la valeur de C sachant que $v(0)=0$.

On a : $\quad v(0)=0 \Longleftrightarrow C\mathrm{e}^{0}+30=0 \Longleftrightarrow C=-30 \qquad$ On a donc $\boxed{v(t)=-30\mathrm{e}^{-\frac{1}{10}t}+30}$

Ex 3

f est définie sur l'ensemble des nombres réels positifs et vérifie la relation $f'(t)+\dfrac{1}{2}f(t)=10$

donc f est une solution de l'équation différentielle $y'+\dfrac{1}{2}y=10$.

On sait de plus que pour $t=0$, la température de l'objet est 220°C donc $f(0)=220$.

① On commence par chercher toutes les solutions de $y'+\dfrac{1}{2}y=10$.

On a : $y'+\frac{1}{2}y=10 \iff y'=-\frac{1}{2}y+10$

Les solutions sont les fonctions de la forme $y(x)=C\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}-\frac{10}{-\frac{1}{2}}$ avec $C\in\mathbb{R}$ soit $\boxed{y(x)=C\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}+20}$ avec $C\in\mathbb{R}$

② f est une solution donc il existe une constante C telle que $\boxed{f(t)=C\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}+20}$

③ On cherche la valeur de C sachant que $f(0)=220$.

On a : $f(0)=220 \iff C\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\times 0}+20=220 \iff C\mathrm{e}^{0}=200 \iff C=200$

On a donc $\boxed{f(t)=200\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}+20}$

Ex 4

1. On a : $4y'-5y=0 \iff 4y'=5y \iff y'=\frac{5}{4}y$.

donc les solutions sont les fonctions de la forme $\boxed{y(x)=C\mathrm{e}^{\frac{5}{4}x}}$ avec $C\in\mathbb{R}$

2. Déterminer la fonction affine f solution particulière de l'équation (E') $4y'-5y=2x-3$

On cherche les réels a et b tels que la fonction f définie par $f(x)=ax+b$ soit solution de (E').

f est solution de (E') $\iff 4f'(x)-5f(x)=2x-3$

$\iff 4a-5(ax+b)=2x-3$ ⚠ Parenthèses !

$\iff 4a-5ax-5b=2x-3$

$\iff -5ax+4a-5b=2x-3$ On ordonne les termes pour avoir une égalité de deux fonctions affines

$$\iff \begin{cases} -5a = 2 & L_1 \\ 4a-5b = -3 & L_2 \end{cases}$$ Par identification des coefficients

$$\iff \begin{cases} a = -\frac{2}{5} \\ b = \frac{7}{25} \end{cases}$$

D'après L_1 : $\boxed{a=\frac{-2}{5}}$

D'après L_2 : $4a-5b=-3 \iff -5b=-3-4a$

$\iff -5b=-3-4\times\frac{-2}{5}$

$\iff -5b=-3+\frac{8}{5}$

$\iff -5b=\frac{-15}{5}+\frac{8}{5}$

$\iff -5b=\frac{-7}{5}$

$\iff b=\frac{7}{25}$

La fonction affine f solution particulière de (E') est donc définie sur $\mathbb{R}$ par $\boxed{f(x)=\frac{-2}{5}x+\frac{7}{25}}$

3. En déduire les solutions de (E').

Les solutions de $4y'-5y=2x-3$ s'obtiennent par addition des solutions de $4y'-5y=0$ et d'une solution particulière de $4y'-5y=2x-3$.

Les solutions de $4y'-5y=2x-3$ sont donc les fonctions de la forme $y(x)=C\mathrm{e}^{\frac{5}{4}x}+f(x)$ soit $\boxed{y(x)=C\mathrm{e}^{\frac{5}{4}x}+\frac{-2}{5}x+\frac{7}{25}}$ avec $C\in\mathbb{R}$.