

1 Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^x - x$ FI du type $+\infty - \infty$

Méthode 1 : $x^2 e^x - x = x(xe^x - 1)$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = \boxed{+\infty}$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^x - 1 = \boxed{+\infty}$

donc par produit $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(xe^x - 1) = +\infty$

et donc $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^x - x = +\infty}$

Méthode 2 : $x^2 e^x - x = x^2 \left(e^x - \frac{1}{x} \right)$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = \boxed{+\infty}$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - \frac{1}{x} = \boxed{+\infty}$

donc par produit $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(e^x - \frac{1}{x} \right) = +\infty$

et donc $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^x - x = +\infty}$

2 Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - 3e^{2x}$ FI du type $+\infty - \infty$

On a : $e^x - 3e^{2x} = e^x(1 - 3e^x)$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = \boxed{+\infty}$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - 3e^x = \boxed{-\infty}$

donc par produit $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x(1 - 3e^x) = -\infty$

et donc $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - 3e^{2x} = -\infty}$

3 Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{e^x + x}$ FI du type $\frac{+\infty}{+\infty}$

On a : $\frac{e^x - 1}{e^x + x} = \frac{e^x \left(1 - \frac{1}{e^x} \right)}{e^x \left(1 + \frac{x}{e^x} \right)} = \frac{1 - \frac{1}{e^x}}{1 + \frac{x}{e^x}}$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{e^x} = \boxed{1}$

- On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{x}{e^x} = \boxed{1}$

donc par quotient $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{e^x}}{1 + \frac{x}{e^x}} = 1$

et donc $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{e^x + x} = 1}$

4 Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1)e^{-x}$

On a : $(x - 1)e^{-x} = \frac{x - 1}{e^x}$ FI du type $\frac{+\infty}{+\infty}$

On a : $(x - 1)e^{-x} = \frac{x - 1}{e^x} = \frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x}$

- On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = \boxed{0}$

- On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{e^x} = \boxed{0}$

donc par somme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} - \frac{1}{e^x} = 0$

et donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1)e^{-x} = 0$

5 Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} x + e^{-x}$ F.I. du type : $-\infty + \infty$

- On a $x + e^{-x} = x + \frac{1}{e^x} = \frac{xe^x + 1}{e^x}$

- On sait que $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x + 1 = \boxed{1}$

- On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \boxed{0^+}$ car pour tout x $e^x > 0$

donc par quotient $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{xe^x + 1}{e^x} = +\infty$

et donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} x + e^{-x} = +\infty$

6 Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\sqrt{x}}$

F.I. du type $\frac{+\infty}{+\infty}$

On a : $\frac{e^x}{\sqrt{x}} = \frac{e^x}{x} \times \frac{x}{\sqrt{x}} = \frac{e^x}{x} \times \sqrt{x}$

- On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = \boxed{+\infty}$

- On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = \boxed{+\infty}$

donc par produit : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} \times \sqrt{x} = +\infty$

et donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\sqrt{x}} = +\infty$

7 Soit $a > 0$, calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - ax$

- On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \boxed{0}$

- On a $a > 0$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} -ax = \boxed{+\infty}$

donc par somme $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - ax = +\infty$ avec $a > 0$

8 Soit $a > 0$, calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - ax$

• On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

• On a $a > 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} -ax = -\infty$

F.I. du type $+\infty - \infty$

On a : $e^x - ax = x \left(\frac{e^x}{x} - a \right)$ (Egalité valable pour tout $x \neq 0$)

• On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = \boxed{+\infty}$

• On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} - a = \boxed{+\infty}$

donc par produit $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{e^x}{x} - a \right) = +\infty$

et donc $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} - ax = +\infty}$ avec $a > 0$

9 Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{5x}$ F.I. du type $\infty \times 0$

On a : $x e^{5x} = \frac{1}{5} \times 5x e^{5x}$

et $\lim_{x \rightarrow -\infty} 5x e^{5x} = \lim_{X \rightarrow -\infty} X e^X = 0$

et donc $\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{5x} = 0}$