$f(x) = x e^{-x}$ sur $[0, +\infty[$

1) $f(x) = \frac{x}{e^x}$

On sait que $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ donc $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$

donc $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

donc la droite d'équation $\boxed{y = 0}$ est une asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

2) $f(x) = x e^{-x}$

$f'(x) = 1 \times e^{-x} + x \times e^{-x} \times (-1) = e^{-x}(1-x)$ donc $\boxed{f'(x) = (1-x)e^{-x}}$

3) * $\forall x \geq 0 \quad e^{-x} > 0$

* $1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$1 - x = ax + b$

avec $a = -1$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

$f(0) = 0$

$f(1) = e^{-1} = \frac{1}{e}$

4) $\forall x \geq 0 \quad f''(x) = e^{-x}(x-2)$

Le signe de f'' donne la convexité de f

* $\forall x \geq 0 \quad e^{-x} > 0$

* $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

$x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$

x	0		2		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

Sur $[0, 2]$ f est concave

Sur $[2, +\infty[$ f est convexe

5) $A(a ; f(a))$ $\quad a \geq 0$

T_a : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

$y = (1-a)e^{-a}(x-a) + ae^{-a}$

$y = (1-a)e^{-a}x - a(1-a)e^{-a} + ae^{-a}$

$y = (1-a)e^{-a}x - \cancel{ae^{-a}} + a^2e^{-a} + \cancel{ae^{-a}}$

$\boxed{y = (1-a)e^{-a}x + a^2e^{-a}}$

$H_a(0 ; g(a))$ et $H_a \in T_a$ donc $\boxed{g(a) = a^2e^{-a}}$

c) Pour $a \geq 0$ $\quad g(a) = a^2e^{-a}$

(g est une fonction de variable a)

On a $g'(a) = 2a e^{-a} + a^2 \times e^{-a} \times (-1)$

$g'(a) = e^{-a}(2a - a^2)$

Signe de $g'(a)$ pour $a \geq 0$

$\forall a \geq 0 \quad e^{-a} > 0$

$2a - a^2 = 0 \Leftrightarrow a(2-a) = 0$

$\Leftrightarrow a = 0$ ou $a = 2$

$2a - a^2 = -a^2 + 2a$ (trinôme du second degré)

(coefficient de a^2 est -1 négatif)

a	0		2		$+\infty$
$g'(a)$	0	$+$	0	$-$	
$g(a)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Donc $g(a)$ est maximum pour $a = 2$

On sait que le point d'abscisse 2 est un point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_f$

donc $g(a)$ est maximum quand A est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$