Ex 1 Pour $x \in \mathbb{R}^*$ $\quad f(x) = \dfrac{xe^x - 2}{1 - e^x}$

1) ① $\lim\limits_{x \to +\infty} xe^x - 2 = +\infty$ $\quad$ FI

$\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - e^x = -\infty$

On a : $f(x) = \dfrac{\cancel{e^x}\left(x - \frac{2}{e^x}\right)}{\cancel{e^x}\left(\frac{1}{e^x} - 1\right)}$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} -\dfrac{2}{e^x} = 0 \end{array}\right\}$ Par somme $\lim\limits_{x \to +\infty} x - \dfrac{2}{e^x} = \boxed{+\infty}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{e^x} - 1 = \boxed{-1}$

Par quotient $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x - \frac{2}{e^x}}{\frac{1}{e^x} - 1} = \boxed{-\infty}$

donc $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty}$

② $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$

donc $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x - 2 = \boxed{-2}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} 1 - e^x = \boxed{1}$

Par quotient $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -2$

2) On a $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -2$

donc la droite d'équation $y = -2$ est une asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$.

5

Ex 2 (E') $\quad y' + 2y = xe^{-2x}$

1 a) g solution de $(E') \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}\ g'(x) + 2g(x) = xe^{-2x}$

On a $g(x) = h(x)e^{-2x}$

donc $g'(x) = h'(x)e^{-2x} + h(x)e^{-2x} \times (-2)$

$g'(x) = e^{-2x}(h'(x) - 2h(x))$

donc $g'(x) + 2g(x)$

$= e^{-2x}(h'(x) - 2h(x)) + 2h(x)e^{-2x}$

$= e^{-2x}(h'(x) - \cancel{2h(x)} + \cancel{2h(x)})$

$= e^{-2x}h'(x)$

donc g solution de $(E') \Leftrightarrow e^{-2x}h'(x) = xe^{-2x}$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}\ h'(x) = x$ $\quad$ car $\forall x \in \mathbb{R}$ $e^{-2x} \neq 0$

b) On a $h'(x) = x$

donc $h(x) = \dfrac{x^2}{2} + C$

On a $h(0) = 1$ donc $C = 1$

Conclusion $\boxed{h(x) = \dfrac{x^2}{2} + 1}$

c) $\forall x \in \mathbb{R}$ $g(x) = h(x)e^{-2x}$

donc $\boxed{g(x) = \left(\dfrac{x^2}{2} + 1\right)e^{-2x}}$

2 a) $y' + 2y = 0 \Leftrightarrow y' = -2y$

les solutions sont les fonctions de la forme $y(x) = Ce^{-2x}$ avec $C \in \mathbb{R}$

b) Les solutions de $y' + 2y = xe^{-2x}$ sont obtenues par addition des solutions de $y' + 2y = 0$ et d'une solution particulière de $y' + 2y = xe^{-2x}$ donc ce sont les fonctions de la forme

$y(x) = Ce^{-2x} + g(x)$

$y(x) = Ce^{-2x} + \left(\dfrac{x^2}{2} + 1\right)e^{-2x}$ $\quad$ avec $C \in \mathbb{R}$

10

$\boxed{Ex\,3}$ 1) Equation de la tangente à C_f au point d'abscisse 0

$y = f'(0)(x-0) + f(0)$

$\boxed{y = -9x + 3}$

$f(0) = 3$

f solution de $y' = -y(6-y)$

donc $\forall x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = -f(x)(6 - f(x))$

donc $f'(0) = -f(0)(6 - f(0))$

$f'(0) = -3(6-3)$

$f'(0) = -3 \times 3 = -9$

2) $\forall x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = -f(x)(6-f(x))$

donc

$f''(x) = -f'(x)(6-f(x)) - f(x)(-f'(x))$

$f''(x) = f'(x)(-6 + f(x) + f(x))$

$\boxed{f''(x) = f'(x)(2f(x) - 6)}$

3) Quand C_f est en-dessous de la droite d'équation $y = 3$

on a $\boxed{f(x) \leq 3}$

Pour étudier la convexité de f on étudie le signe de f''

On a : $\forall x \in \mathbb{R}$ $f''(x) = f'(x)(2f(x) - 6)$

On sait que f est décroissante sur $\mathbb{R}$ donc f' est négative sur $\mathbb{R}$

donc : $\forall x \in \mathbb{R}$ $\boxed{f'(x) \leq 0}$

On est dans le cas où $f(x) \leq 3$

donc $2f(x) \leq 6$

donc $\boxed{2f(x) - 6 \leq 0}$

Conclusion : Quand C_f est en-dessous de la droite d'équation $y = 3$ on a $f''(x) \geq 0$ et donc f est convexe