

On considère la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $f(x) = xe^{-x}$.

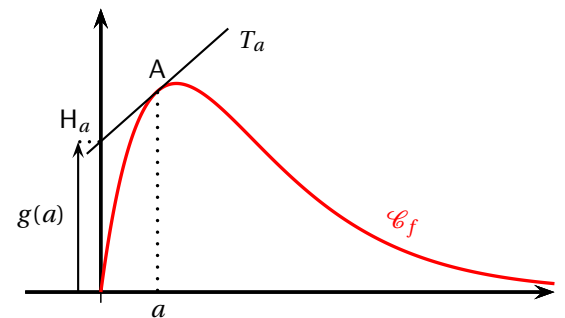
On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

On admet que f est deux fois dérivable sur $[0 ; +\infty[$. On note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

1. En remarquant que pour tout x dans $[0 ; +\infty[$, on a $f(x) = \frac{x}{e^x}$ démontrer que la courbe $\mathcal{C}_f$ possède une asymptote en $+\infty$ dont on donnera une équation.
2. Démontrer que pour tout réel x appartenant à $[0 ; +\infty[$: $f'(x) = (1-x)e^{-x}$.
3. Dresser le tableau de variations de f sur $[0 ; +\infty[$, sur lequel on fera figurer les valeurs aux bornes ainsi que la valeur exacte de l'extremum.
4. On admet que pour tout x appartenant à $[0 ; +\infty[$: $f''(x) = e^{-x}(x-2)$.
Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
5. Soit a un réel appartenant à $[0 ; +\infty[$ et A le point de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisse a . On note T_a la tangente à $\mathcal{C}_f$ en A .
On note H_a le point d'intersection de la droite T_a et de l'axe des ordonnées. On note $g(a)$ l'ordonnée de H_a .

La situation est représentée sur la figure ci-contre.

- a. Démontrer qu'une équation réduite de la tangente T_a est :
$$y = [(1-a)e^{-a}]x + a^2e^{-a}.$$
- b. En déduire l'expression de $g(a)$.
- c. Démontrer que $g(a)$ est maximum lorsque A est un point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_f$.



On considère la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $f(x) = xe^{-x}$.

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

On admet que f est deux fois dérivable sur $[0 ; +\infty[$. On note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

1. En remarquant que pour tout x dans $[0 ; +\infty[$, on a $f(x) = \frac{x}{e^x}$ démontrer que la courbe $\mathcal{C}_f$ possède une asymptote en $+\infty$ dont on donnera une équation.
2. Démontrer que pour tout réel x appartenant à $[0 ; +\infty[$: $f'(x) = (1-x)e^{-x}$.
3. Dresser le tableau de variations de f sur $[0 ; +\infty[$, sur lequel on fera figurer les valeurs aux bornes ainsi que la valeur exacte de l'extremum.
4. On admet que pour tout x appartenant à $[0 ; +\infty[$: $f''(x) = e^{-x}(x-2)$.
Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
5. Soit a un réel appartenant à $[0 ; +\infty[$ et A le point de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisse a . On note T_a la tangente à $\mathcal{C}_f$ en A .
On note H_a le point d'intersection de la droite T_a et de l'axe des ordonnées. On note $g(a)$ l'ordonnée de H_a .

La situation est représentée sur la figure ci-contre.

- a. Démontrer qu'une équation réduite de la tangente T_a est :
$$y = [(1-a)e^{-a}]x + a^2e^{-a}.$$
- b. En déduire l'expression de $g(a)$.
- c. Démontrer que $g(a)$ est maximum lorsque A est un point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_f$.

