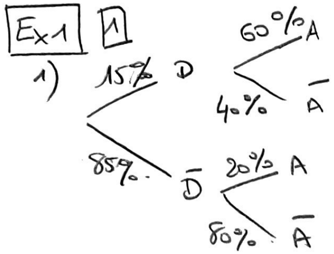
Bac Blanc 2025
Sujet 1

Ex 1 **1**

1)



2) $P(D\cap A) = P(D)\times P_D(A) = 0,15\times 0,6 = \boxed{0,09}$

3) $P(A) = P(D\cap A) + P(\overline{D}\cap A)$ d'après la formule des probabilités totales.

$P(A) = 0,15\times 0,6 + 0,85\times 0,2 = 0,09 + 0,17 = \boxed{0,26}$

4) $P_A(\overline{D}) = \dfrac{P(A\cap\overline{D})}{P(A)} = \dfrac{0,9\times 0,2}{0,24} = \dfrac{0,18}{0,24} = \dfrac{18}{24} = \dfrac{3}{4} = \boxed{0,75}$

2

1 a) X suit la loi $\mathcal{B}(10 ; 0,26)$ $\quad 1-0,26 = 0,74$

b) $P(X=3) = \binom{10}{3}\times 0,26^3\times 0,74^7 \simeq \boxed{0,26}$

c) $P(X\leq 5) \simeq \boxed{0,97}$

2) n candidats X le nombre de candidats admis

X suit la loi $\mathcal{B}(n ; 0,26)$

a) $\boxed{P(X=0) = 0,74^n}$

b) $P(X\geq 1) = 1-P(X=0) = 1-0,74^n$

On cherche le plus petit entier n tel que $P(X\geq 1)\geq 0,99$

On a : $P(X\geq 1)\geq 0,999$

$\iff 1-0,74^n \geq 0,999$

$\iff -0,74^n \geq -0,001$

$\iff 0,74^n \leq 0,001$ $\quad$ Fonction ln croissante sur $]0;+\infty[$

$\iff n\ln(0,74) \leq \ln(0,001)$

$\iff n \geq \dfrac{\ln(0,001)}{\ln(0,74)}$ $\quad$ car $\ln(0,74) < 0$ puisque $0,74 < 1$

$\simeq 22,9$

Donc $\boxed{n = 23}$ Il faut 23 candidats au moins pour que la probabilité que l'un soit admis soit sup ou égale à 0,99

Ex 2

1 Sur $[1;4]$ $\quad f(x) = -30x + 50 + 35\ln(x)$

1) a) $f'(x) = -30 + 35\times\dfrac{1}{x} = -30 + \dfrac{35}{x}$

$\boxed{f'(x) = \dfrac{-30x+35}{x}}$

b) $-30x+35 = ax+b$ $\quad$ Fonction affine avec $a=-30$, $a<0$

$-30x+35 = 0 \iff -30x = -35$

$\iff x = \dfrac{35}{30}$

$\iff x = \dfrac{7}{6}$

Sur $[1;4]$ $x>0$.

Donc $f'(x)$ est du même signe que $-30x+35$

c)

x	1		$7/6$		α		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$			
$f(x)$	20	$\nearrow$	$\simeq 20,4$	$\searrow$	0	$\searrow$	$\simeq -21,5$

- $f(1) = -30+50+35\ln(1)$
  $f(1) = 20$
- $f(4) = -120+50+35\ln(4)$
  $f(4) = -70+35\ln(4)$
  $f(4) \simeq -21,5$

- $f(7/6) = -30\times\dfrac{7}{6} + 50 + 35\ln\left(\dfrac{7}{6}\right)$
  $= -35 + 50 + 35\ln\left(\dfrac{7}{6}\right) = 15 + 35\ln\left(\dfrac{7}{6}\right)$

$f(7/6) \simeq 20,4$

2) Sur $[1; 7/6]$ $\quad f(x)\geq 20$

Donc l'équation $f(x)=0$ n'a pas de solution sur $[1;7/6]$

Sur $[7/6; 4]$ $\quad$ f est continue (car dérivable)

f est strictement décroissante

$f(7/6) > 0$
$f(4) < 0$ $\quad$ donc $0\in[f(4); f(7/6)]$

D'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x)=0$ a une unique solution sur $[7/6;4]$ que l'on note α (donc une unique solution sur $[1;4]$)

Ex 2 (2)

On a : $\boxed{\alpha \simeq 2,915}$

car $f(2,914) > 0$ et $f(2,915) < 0$.

3)

x	1		α		4
$f(x)$		$+$	0	$-$	

$\boxed{2}$ $x \in [1,4]$ x milliers de litres vendus.

$B(x) = -15x^2 + 15x + 35x\ln(x)$ $B(x)$ en milliers d'euros.

1) 2500 litres de jus de fruit donc $x = 2,5$

Le bénéfice est $B(2,5)$

$B(2,5) = -15\times 2,5^2 + 15\times 2,5 + 35\times 2,5\ln(2,5)$

$B(2,5) \simeq 23,295$

donc le bénéfice est d'environ $\boxed{23295 \text{ euros}}$

2) $\forall x \in [1;4]$ $B'(x) = -15\times 2x + 15 + 35\left(1\times \ln(x) + x\times \frac{1}{x}\right)$

$B'(x) = -30x + 15 + 35(\ln(x) + 1)$

$B'(x) = -30x + 15 + 35\ln(x) + 35$

$B'(x) = -30x + 50 + 35\ln(x)$

donc $\boxed{B'(x) = f(x)}$

3 a)

x	1		α		4
$B'(x)$		$+$	0	$-$	
$B(x)$	0	↗	$B(\alpha)$	↘	$B(4)$

- $B(1) = -15 + 15 + 35\ln(1)$

  $B(1) = 0$
- $B(4) = -15\times 16 + 15\times 4 + 35\times 4\ln(4)$

  $B(4) = -240 + 60 + 140\ln(4)$

  $B(4) = -180 + 140\ln(4)$

  ou $\boxed{B(4) = -180 + 280\ln(2)}$

Pour réaliser un bénéfice maximal l'entreprise doit vendre α milliers de litres de jus de fruits soit environ $\boxed{2914 \text{ litres}}$

$\boxed{\text{Ex 3}}$ $a_0 = 200$.

$\boxed{A}$ 1) $a_1 = a_0\times 0,85 + 450 = 200\times 0,85 + 450$

$\boxed{a_1 = 620}$

2) a_n est le nombre d'employés en télétravail n mois plus tard (n mois après le mois de mai)

85% d'entre eux restent en télétravail le mois suivant soit $0,85\times a_n$ employés.

A cela s'ajoute 450 employés qui se mettent au télétravail.

On a donc $\boxed{a_{n+1} = 0,85a_n + 450}$

3) $\forall n \in \mathbb{N}$ $V_n = a_n - 3000$

a) $V_{n+1} = a_{n+1} - 3000 = 0,85a_n + 450 - 3000$

$= 0,85a_n - 2550$

$= 0,85\left(a_n - \frac{2550}{0,85}\right)$

$= 0,85(a_n - 3000)$

$\boxed{V_{n+1} = 0,85V_n}$

Donc (V_n) est géométrique de raison $0,85$, de premier terme $V_0 = a_0 - 3000$

$\boxed{V_0 = -2800}$

b) $\forall n \in \mathbb{N}$ $V_n = V_0\times q^n$

donc $\boxed{V_n = -2800\times 0,85^n}$

c) $\forall n \in \mathbb{N}$ $V_n = a_n - 3000$

donc $a_n = V_n + 3000$

donc $\boxed{a_n = -2800\times 0,85^n + 3000}$

4) On cherche le plus petit entier n tel que $a_n > 2500$

On a $a_n > 2500$

$\iff -2800\times 0,85^n + 3000 > 2500$

$\iff -2800\times 0,85^n > -500$

$\iff 0,85^n < \frac{5}{28}$

Ex 3 (2)

$\Leftrightarrow \ln(0,85)^n < \ln\left(\frac{5}{28}\right)$ car la fonction ln est strictement croissante sur $]0,+\infty[$

$\Leftrightarrow n\ln(0,85) < \ln\left(\frac{5}{28}\right)$

$\Leftrightarrow n > \dfrac{\ln\left(\frac{5}{28}\right)}{\ln(0,85)}$ car $\ln(0,85) < 0$ puisque $0,85 < 1$

$\simeq 10,6$

Soit $\boxed{n = 11}$

Donc au bout de 11 mois, le nombre de télétravailleurs sera strictement supérieur à 2500.

B $U_0 = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad U_{n+1} = \dfrac{5U_n + 4}{U_n + 2}$

1) Sur $[0,+\infty[$ $f(x) = \dfrac{5x+4}{x+2}$

$f'(x) = \dfrac{5(x+2) - (5x+4)\times 1}{(x+2)^2} = \dfrac{5x + 10 - 5x - 4}{(x+2)^2}$

$\boxed{f'(x) = \dfrac{6}{(x+2)^2}}$

$\forall x \in [0,+\infty[\quad f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $[0,+\infty[$

2) a) Démontrer que pour tout $n \geq 0 \quad 0 \leq U_n \leq U_{n+1} \leq 4$

① Pour $n = 0$ $\quad U_0 = 1$

$U_1 = \dfrac{5U_0 + 4}{U_0 + 2} = \dfrac{9}{3} = 3.$

donc $0 \leq U_0 \leq U_1 \leq 4$

donc vrai pour $n = 0$.

② Soit $n \geq 0$ tel que $0 \leq U_n \leq U_{n+1} \leq 4$

Montrons que $0 \leq U_{n+1} \leq U_{n+2} \leq 4$

On a $0 \leq U_n \leq U_{n+1} \leq 4$

donc $f(0) \leq f(U_n) \leq f(U_{n+1}) \leq f(4)$

car f est strictement croissante sur $[0,+\infty[$

On a $\forall n \in \mathbb{N}$ $U_{n+1} = f(U_n)$

Ex 3 (3)

On a $f(0) = \frac{4}{2} = 2$

$f(4) = \dfrac{20+4}{4+2} = \dfrac{24}{6} = 4$

donc $2 \leq U_{n+1} \leq U_{n+2} \leq 4$

donc $0 \leq U_{n+1} \leq U_{n+2} \leq 4$

CQFD

③ D'après le principe de raisonnement par récurrence, pour tout $n \geq 0$, on a $0 \leq U_n \leq U_{n+1} \leq 4$

b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \leq U_{n+1}$ donc (U_n) est croissante.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \leq 4$ donc (U_n) est majorée par 4.

(U_n) étant croissante et majorée, elle converge.

3) On a : $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq 4 - U_n \leq 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

avec $\lim\limits_{n \to +\infty} 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = 3 \times 0 = 0$ car $-1 < \frac{1}{2} < 1$

donc d'après le théorème des gendarmes, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} 4 - U_n = 0}$

Si on note $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ on a $4 - \ell = 0$

donc $\ell = 4$

Conclusion : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 4}$

Interprétation :

A long terme, le nombre d'employés satisfaits par le dispositif sera de 4 000.

$\boxed{\text{Ex 4}}$ (2)

4) f est solution de (E) donc

$$f(x) = Ce^{\frac{1}{2}x} + x + 2$$

$A(0,-2)$ et $A \in \mathcal{C}_1$ (Courbe de F)

donc $\boxed{F(0) = -2}$

$B(0;\frac{1}{2})$ et $A \in \mathcal{C}_2$ (Courbe de f')

donc $\boxed{f'(0) = \frac{1}{2}}$

On a $f'(x) = Ce^{\frac{1}{2}x} \times \frac{1}{2} + 1$

$$f'(0) = \frac{1}{2} \iff Ce^{0} \times \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$
$$\iff \frac{1}{2}C + 1 = \frac{1}{2}$$
$$\iff \frac{1}{2}C = -\frac{1}{2}$$
$$\iff C = -1$$

donc $\boxed{f(x) = -e^{\frac{1}{2}x} + x + 2}$

On a donc $F(x) = -\dfrac{e^{\frac{1}{2}x}}{\frac{1}{2}} + \dfrac{x^2}{2} + 2x + C$ avec $C \in \mathbb{R}$

donc $F(x) = -2e^{\frac{1}{2}x} + \dfrac{x^2}{2} + 2x + C$

$$F(0) = -2 \iff -2e^{0} + C = -2$$
$$\iff -2 + c = -2$$
$$\iff C = 0$$

donc $\boxed{F(x) = -2e^{\frac{1}{2}x} + \frac{1}{2}x^2 + 2x}$

$\boxed{\text{Ex 4}}$ $\boxed{A}$

1)

x	$-\infty$		a		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	b	$\searrow$	$-\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

Sur $]-\infty, a[$ $f'(x) > 0$

$f'(a) = 0$

Sur $]a, +\infty[$ $f'(x) < 0$.

2) a) D'après le signe de f', on en déduit que la courbe de f' est $\mathcal{C}_2$

Donc $\mathcal{C}_1$ est la courbe de F, une primitive de f sur $\mathbb{R}$

b) i) $f'(a) = 0$ donc $\boxed{1 < a < 2}$

ii) On a $f(a) = b$.
donc $F'(a) = b$. | Car $\forall x \in \mathbb{R}$ $F'(x) = f(x)$

$F'(a)$ est le coefficient directeur de la courbe de F au point d'abscisse a.

D'après $\mathcal{C}_1$, ce coefficient directeur est positif

donc $\boxed{b > 0}$

$\boxed{B}$ f est solution de (E) $y - 2y' = x$

1) $\forall x \in \mathbb{R}$ $g(x) = x + 2$

$g'(x) = 1$

donc $g(x) - 2g'(x) = x + 2 - 2 = x$

donc g est solution de (E)

2) $y - 2y' = 0 \iff 2y' = y \iff y' = \frac{1}{2}y$

Solutions : $y(x) = Ce^{\frac{1}{2}x}$ avec $C \in \mathbb{R}$

3) Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont :

$$y(x) = Ce^{\frac{1}{2}x} + g(x)$$

$\boxed{y(x) = Ce^{\frac{1}{2}x} + x + 2}$ avec $C \in \mathbb{R}$