

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Mathématiques

Lundi 10 Mars 2025

Sujet 1

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège », est autorisé.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses seront valorisées.

Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

Le sujet est composé de 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5 et comporte 4 exercices.

Dans une école de statistique, après étude des dossiers des candidats, le recrutement se fait de deux façons :

- 15 % des candidats sont sélectionnés sur dossier. Ces candidats doivent ensuite passer un oral à l'issue duquel 60 % d'entre eux sont finalement admis à l'école.
- Les candidats n'ayant pas été sélectionnés sur dossier passent une épreuve écrite à l'issue de laquelle 20 % d'entre eux sont admis à l'école.

Partie 1

On choisit au hasard un candidat à ce concours de recrutement. On notera :

- D l'évènement « le candidat a été sélectionné sur dossier » ;
- A l'évènement « le candidat a été admis à l'école » ;
- $\overline{D}$ et $\overline{A}$ les évènements contraires des évènements D et A respectivement.

1. Traduire la situation par un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité que le candidat soit sélectionné sur dossier et admis à l'école.
3. Montrer que la probabilité de l'évènement A est égale à 0,26.
4. On choisit au hasard un candidat admis à l'école. Quelle est la probabilité que son dossier n'ait pas été sélectionné ?

Partie 2

1. On admet que la probabilité pour un candidat d'être admis à l'école est égale à 0,26.

On considère un échantillon de dix candidats choisis au hasard, en assimilant ce choix à un tirage au sort avec remise.

On désigne par X la variable aléatoire dénombrant les candidats admis à l'école parmi les dix tirés au sort.

- a. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Quels sont les paramètres de cette loi ?
 - b. Calculer la probabilité que, parmi les dix candidats tirés au sort, trois candidats soient admis à l'école. On donnera une réponse arrondie au centième.
 - c. Calculer la probabilité qu'au plus cinq candidats, parmi les dix candidats tirés au sort, soient admis à cette école. On donnera une réponse arrondie au centième.
2. Un lycée présente n candidats au recrutement dans cette école, où n est un entier naturel non nul.
On admet que la probabilité pour un candidat quelconque du lycée d'être admis à l'école est égale à 0,26 et que les résultats des candidats sont indépendants les uns des autres.
 - a. Donner l'expression, en fonction de n , de la probabilité qu'aucun candidat issu de ce lycée ne soit admis à l'école.
 - b. En résolvant une inéquation, déterminer à partir de quelle valeur de l'entier n la probabilité qu'au moins un élève de ce lycée soit admis à l'école est supérieure ou égale à 0,999.

En mai 2020, une entreprise fait le choix de développer le télétravail afin de s'inscrire dans une démarche écoresponsable.

Elle propose alors à ses 5 000 collaborateurs en France de choisir entre le télétravail et le travail au sein des locaux de l'entreprise.

En mai 2020, seuls 200 d'entre eux ont choisi le télétravail.

Chaque mois, depuis la mise en place de cette mesure, les dirigeants de l'entreprise constatent que 85 % de ceux qui avaient choisi le télétravail le mois précédent choisissent de continuer, et que, chaque mois, 450 collaborateurs supplémentaires choisissent le télétravail.

On modélise le nombre de collaborateurs de cette entreprise en télétravail par la suite (a_n) .

Le terme a_n désigne ainsi une estimation du nombre de collaborateurs en télétravail le n -ième mois après le mois de mai 2020. Ainsi $a_0 = 200$.

Partie A :

1. Calculer a_1 .
2. Justifier que pour tout entier naturel n , $a_{n+1} = 0,85a_n + 450$.
3. On considère la suite (V_n) définie pour tout entier naturel n par : $V_n = a_n - 3\,000$.
 - a. Démontrer que la suite (V_n) est une suite géométrique de raison 0,85.
 - b. Exprimer V_n en fonction de n pour tout entier naturel n .
 - c. En déduire que, pour tout entier naturel n , $a_n = -2\,800 \times 0,85^n + 3\,000$.
4. Déterminer le nombre de mois au bout duquel le nombre de télétravailleurs sera strictement supérieur à 2 500, après la mise en place de cette mesure dans l'entreprise.

Partie B :

Afin d'évaluer l'impact de cette mesure sur son personnel, les dirigeants de l'entreprise sont parvenus à modéliser le nombre de collaborateurs satisfaits par ce dispositif à l'aide de la suite (U_n) définie par $U_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n ,

$$U_{n+1} = \frac{5U_n + 4}{U_n + 2}$$

où U_n désigne le nombre de milliers de collaborateurs satisfaits par cette nouvelle mesure au bout de n mois après le mois de mai 2020.

1. Démontrer que la fonction f définie pour tout $x \in [0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{5x+4}{x+2}$ est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.
2. a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel

$$0 \leq U_n \leq U_{n+1} \leq 4.$$

- b. Justifier que la suite (U_n) est convergente.
3. On admet que pour tout entier naturel n , $0 \leq 4 - U_n \leq 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

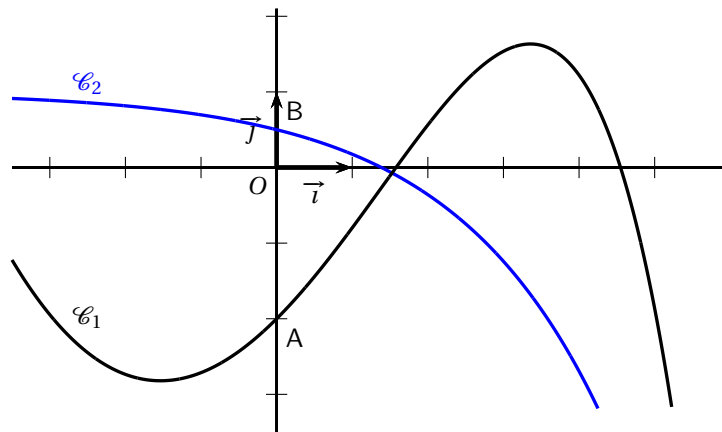
En déduire la limite de la suite (U_n) et l'interpréter dans le contexte de la modélisation.

Partie A

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ dont le tableau de variations est donné ci-dessous où a et b désignent deux réels.

x	$-\infty$	a	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	b	$-\infty$

- Déterminer le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x .
- Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on a tracé deux courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.
Elles coupent l'axe des ordonnées aux points A et B d'ordonnées -2 et $\frac{1}{2}$ respectivement.
L'une de ces courbes est la courbe représentative de la fonction dérivée f' de f et l'autre la courbe représentative d'une primitive F de la fonction f sur $\mathbb{R}$.



- Indiquer laquelle de ces deux courbes est la courbe représentative de la fonction f' . Justifier la réponse.
- À l'aide des courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$,
 - Donner un encadrement de a par deux entiers consécutifs.
 - Prouver que $b > 0$.

Partie B

Dans cette partie, on admet que la fonction f est solution de l'équation différentielle

$$(E) \quad y - 2y' = x$$

- Démontrer que la fonction g définie pour tout réel x par $g(x) = x + 2$ est solution de (E).
- Résoudre l'équation différentielle $y - 2y' = 0$.
- En déduire les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E).
- En utilisant les coordonnées des points A et B, déterminer les fonctions f et F .