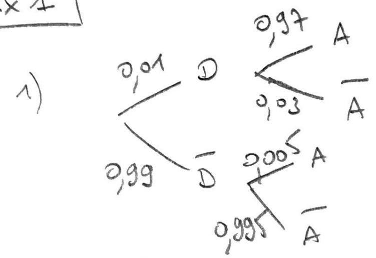
Ex 1

1) 

$P(A) = 0,01465$

2) a) $P(D \cap A) = P(D) \times P_D(A) = 0,01 \times 0,97 = \boxed{0,0097}$

b) $P_A(D) = \dfrac{P(A \cap D)}{P(A)} = \dfrac{0,0097}{0,01465} \simeq \boxed{0,662}$

3) Montrer que $P_{\bar{D}}(A) = 0,005$

On a $P_{\bar{D}}(A) = \dfrac{P(\bar{D} \cap A)}{P(\bar{D})}$

et $P(D \cap A) + P(\bar{D} \cap A) = P(A)$

d'après la formule des probabilités totales.

donc $P(\bar{D} \cap A) = P(A) - P(D \cap A)$

$= 0,01465 - 0,0097$

$= \boxed{0,00495}$

donc $P_{\bar{D}}(A) = \dfrac{0,00495}{0,99}$

$\boxed{P_{\bar{D}}(A) = 0,005}$

B

1) Epreuve de Bernoulli : On regarde si une alarme fonctionne normalement.

Succès : L'alarme fonctionne normalement.

Probabilité du succès : $P(S) = 0,00525$

5 Epreuves identiques et indépendantes.

X est la variable aléatoire égale au nombre de succès.

X suit la loi $\mathcal{B}(5 ; 0,00525)$

2) $P(X=1) = \binom{5}{1} 0,00525 \times (1-0,00525)^4$

$\boxed{P(X=1) \simeq 0,0257}$

3) $P(X \geq 1) = 1 - P(X=0)$

$= 1 - (1-0,00525)^5$

$\boxed{P(X \geq 1) \simeq 0,0260}$

C X suit la loi $\mathcal{B}(n ; 0,00525)$

$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - (1-0,00525)^n$

$= 1 - 0,99475^n$

On cherche le plus petit entier n tel que

$P(X \geq 1) \geq 0,07$

On a $P(X \geq 1) \geq 0,07$

$\Leftrightarrow 1 - 0,99475^n \geq 0,07$

$\Leftrightarrow -0,99475^n \geq -0,93$) $\times(-1)$ négatif

$\Leftrightarrow 0,99475^n \leq 0,93$) f^n ln croissante sur $]0 ; +\infty[$

$\Leftrightarrow n \ln(0,99475) \leq \ln(0,93)$) $\ln(0,99475) < 0$ car $0,99475 < 1$

$\Leftrightarrow n \geq \dfrac{\ln(0,93)}{\ln(0,99475)}$

$\boxed{n = 14}$

x2

Sur $]0,+\infty[$ $f(x) = \dfrac{2\ln(x)-1}{x}$

1) $f(x)=0 \iff 2\ln(x)-1=0$
$\iff 2\ln(x) = 1$
$\iff \ln(x) = \frac{1}{2}$
$\iff x = e^{1/2}$

$\boxed{S = \{e^{1/2}\}}$

$\alpha = e^{1/2}$
$\alpha \simeq 1{,}65$

2)

x	0	α	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$

II Sur $]0,+\infty[$ $g(x) = (\ln(x))^2 - \ln(x)$

1a) $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 0} (\ln(x))^2 = \lim\limits_{X\to -\infty} X^2 = +\infty$

donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} g(x) = +\infty}$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty$ F.I du type "$+\infty - \infty$"

$g(x) = \ln(x)(\ln(x)-1)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) - 1 = +\infty$

Par produit $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty}$

2) $g'(x) = 2\ln(x) \times \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x}(2\ln(x)-1)$

$g'(x) = \dfrac{2\ln(x-1)}{x}$ donc $\boxed{g'(x) = f(x)}$

3)

x	0		α		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$ 0	$-0{,}25$	0 $\nearrow$	$+\infty$

$g(\alpha) = (\ln(\alpha))^2 - \ln(\alpha)$
$g(\alpha) = g(e^{1/2})$
$= (\ln(e^{1/2}))^2 - \ln(e^{1/2})$
$= \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}$
$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$
$= -0{,}25$

Sur $]0,\alpha]$
g est continue (car dérivable)
g est strictement décroissante.
$\lim\limits_{x\to 0} g(x) = +\infty$
$g(\alpha) = -0{,}25$

Pour tout $m > -0{,}25$, d'après le corollaire du TVI l'équation $g(x) = m$ a exactement 1 solution sur $]0,\alpha]$

De même l'équation $g(x) = m$ a une unique solution dans $[\alpha,+\infty[$.

Conclusion : Pour tout $m > -0{,}25$, l'équation $g(x) = m$ a exactement 2 solutions sur $]0,+\infty[$

5) Résoudre $g(x) = 0$

$g(x) = 0 \iff (\ln(x))^2 - \ln(x) = 0$
$\iff \ln(x)\,(\ln(x)-1) = 0$
$\iff \ln(x) = 0$ ou $\ln(x) = 1 = 0$
$\iff x = 1$ ou $x = e$

Les 2 solutions sont 1 et e.

Ex 3 $U_0 = 0,3$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $U_{n+1} = 2U_n(1-U_n)$

$U_{n+1} = f(U_n)$

avec $f(x) = 2x(1-x)$

1) $f(x) = 2x(1-x)$

$f(x) = 2x - 2x^2$

$\boxed{f'(x) = 2 - 4x}$

Signe de $f'(x)$ Fonction affine $ax+b$ avec $a = -4$, $a < 0$

et $f'(x) = 0 \iff 2 - 4x = 0$

$\iff x = \frac{2}{4}$

$\iff \boxed{x = \frac{1}{2}}$

x	0		$1/2$
$f'(x)$		$+$	0

donc f strictement croissante sur $[0; \frac{1}{2}]$

2) $\forall n \in \mathbb{N}$ $0 \leq U_n \leq \frac{1}{2}$

$U_1 = 2U_0(1-U_0) = 0,6(1-0,3) = 0,6 \times 0,7 = 0,42$

$\boxed{U_1 = 0,42}$

Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 0$, $U_n \leq U_{n+1}$

- Pour $n = 0$ $U_0 = 0,3$ $U_1 = 0,42$ donc $U_0 \leq U_1$ donc vrai pour $n = 0$
- Soit $n \geq 0$ tel que $U_n \leq U_{n+1}$
  Montrons que $U_{n+1} \leq U_{n+2}$
  On a $U_n \leq U_{n+1}$ avec U_n et U_{n+1} dans $[0; \frac{1}{2}]$
  donc $f(U_n) \leq f(U_{n+1})$ car f croissante sur $[0, \frac{1}{2}]$
  donc $U_{n+1} \leq U_{n+2}$
- D'après le principe de raisonnement par récurrence $\forall n \in \mathbb{N}$ $U_n \leq U_{n+1}$

3) $\forall n \in \mathbb{N}$ $0 \leq U_n \leq \frac{1}{2}$ et $U_n \leq U_{n+1}$

donc la suite (U_n) est croissante et majorée (par $\frac{1}{2}$)

donc elle converge

Ex 3 (2)

4) On note $l = \lim\limits_{n \to +\infty} U_n$ on a $0 \leq l \leq \frac{1}{2}$

et d'après $U_{n+1} = 2U_n(1-U_n)$

par passage à la limite on a :

$l = 2l(1-l)$

donc $l = 2l - 2l^2$

$2l^2 - l = 0$

$l(2l - 1) = 0$.

donc $l = 0$ ou $l = \frac{1}{2}$

On sait que $U_0 = 0,3$ et (U_n) croissante

donc $l = 0$ est impossible

donc $\boxed{l = \frac{1}{2}}$

B P_n : Effectif d'une population en milliers d'individus en $2022 + n$.

$P_0 = 3$ (Année 2022)

$\forall n \in \mathbb{N}$ $P_{n+1} - P_n = P_n(1 - bP_n)$ avec $b > 0$.

1) $b = 0$

a) $\forall n \in \mathbb{N}$ $P_{n+1} - P_n = P_n$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $P_{n+1} = 2P_n$

donc (P_n) est géométrique de raison 2, de premier terme $P_0 = 3$.

b) $\forall n \in \mathbb{N}$ $P_n = P_0 \times q^n$

$P_n = 3 \times 2^n$

donc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} P_n = +\infty}$ car $2 > 1$

2) $b = 0,2$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $P_{n+1} - P_n = P_n(1 - 0,2P_n)$

a) $\forall n \in \mathbb{N}$ $V_n = 0,1 P_n$

$V_0 = 0,1 \times P_0 = 0,1 \times 3 = \boxed{0,3}$

$V_{n+1} = 0,1 P_{n+1}$ avec $P_{n+1} = P_n(1 - 0,2P_n) + P_n$

donc $P_{n+1} = P_n(1 - 0,2P_n + 1)$

$P_{n+1} = P_n(2 - 0,2P_n)$

Ex 3 (3)

donc $V_{n+1} = 0{,}1\, P_n\,(2 - 0{,}2 P_n)$

$V_{n+1} = 0{,}1\, P_n \times 2(1 - 0{,}1\, P_n)$

$V_{n+1} = V_n \times 2\,(1 - V_n)$

$\boxed{V_{n+1} = 2V_n\,(1 - V_n)}$ avec $V_0 = 0{,}3$.

On reconnaît la suite (u_n) étudiée dans la partie A

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \frac{1}{2}$

De plus $\forall n \in \mathbb{N}$ $V_n = 0{,}1 \times P_n$

donc $P_n = \dfrac{V_n}{0{,}1}$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = \dfrac{0{,}5}{0{,}1} = 5$

donc la population se stabilisera autour de 5000 individus.

Ex 4

A Sur $\mathbb{R}$ $f(x) = e^{x} + ax + be^{-x}$

1) $f(0) = 3$ $\quad f'(0) = -2$

2) $f(0) = e^0 + 0 + be^0$

$\boxed{f(0) = 1 + b}$ donc $\boxed{b = 2}$

3) $f(x) = e^{x} + ax + 2e^{-x}$

a) $\boxed{f'(x) = e^{x} + a - 2e^{-x}}$

b) $f'(0) = e^0 + a - 2e^0 = 1 + a - 2 = a - 1$

donc $\boxed{a = -1}$

donc $\boxed{f(x) = e^{x} - x + 2e^{-x}}$

4) (E) $\quad y' + y = 2e^{x} - x - 1$

a) Sur $\mathbb{R}$ $g(x) = e^{x} - x + 2e^{-x}$

$g'(x) = e^{x} - 1 - 2e^{-x}$

$g'(x) + g(x) = 2e^{x} - x - 1$ donc g solution de (E)

b) $y' + y = 0 \iff y' = -y$

Solutions : $y(x) = Ce^{-x}$ avec $C \in \mathbb{R}$

c) les solutions de (E) sont donc :

$y(x) = Ce^{-x} + g(x)$

$y(x) = Ce^{-x} + e^{x} - x + 2e^{-x}$ avec $C \in \mathbb{R}$

B Sur $[1, +\infty[$ $\quad g(x) = e^{x} - x + 2e^{-x}$

1) $(e^{x} - 2)(e^{x} + 1) = (e^{x})^2 + e^{x} - 2e^{x} - 2 = e^{2x} - e^{x} - 2$

CQFD

2) $g'(x) = e^{x} - 1 - 2e^{-x}$

$g'(x) = e^{-x}\left(\dfrac{e^{x}}{e^{-x}} - \dfrac{1}{e^{-x}} - 2\right) = e^{-x}(e^{2x} - e^{x} - 2)$

donc $\boxed{g'(x) = e^{-x}(e^{x} - 2)(e^{x} + 1)}$

3) $\forall x \geqslant 1$ $\quad e^{x} - 2 > 0$ $\quad e^{-x} > 0$ et $e^{x} + 1 > 0$ donc $g'(x) > 0$

donc g strictement croissante sur $[1, +\infty[$