

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Mathématiques

Mardi 11 Mars 2025

Sujet 2

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège », est autorisé.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses seront valorisées.

Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

Le sujet est composé de 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5 et comporte 4 exercices.

PARTIE A

Le système d'alarme d'une entreprise fonctionne de telle sorte que, si un danger se présente, l'alarme s'active avec une probabilité de 0,97. La probabilité qu'un danger se présente est de 0,01 et la probabilité que l'alarme s'active est de 0,014 65.

On note A l'évènement « l'alarme s'active » et D l'évènement « un danger se présente ».

On note $\overline{M}$ l'évènement contraire d'un évènement M et $P(M)$ la probabilité de l'évènement M .

1. Représenter la situation par un arbre pondéré qui sera complété au fur et à mesure de l'exercice.
2.
 - a. Calculer la probabilité qu'un danger se présente et que l'alarme s'active.
 - b. En déduire la probabilité qu'un danger se présente sachant que l'alarme s'active. Arrondir le résultat à 10^{-3} .
3. Montrer que la probabilité que l'alarme s'active sachant qu'aucun danger ne s'est présenté est 0,005.

PARTIE B

Une usine fabrique en grande quantité des systèmes d'alarme. On prélève successivement et au hasard 5 systèmes d'alarme dans la production de l'usine. Ce prélèvement est assimilé à un tirage avec remise.

On note S l'évènement « l'alarme ne fonctionne pas normalement » et on admet que $P(S) = 0,005\ 25$.

On considère X la variable aléatoire qui donne le nombre de systèmes d'alarme ne fonctionnant pas normalement parmi les 5 systèmes d'alarme prélevés. Les résultats seront arrondis à 10^{-4} .

1. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Quels sont les paramètres de cette loi ?
2. Calculer la probabilité que, dans le lot prélevé, un seul système d'alarme ne fonctionne pas normalement.
3. Calculer la probabilité que, dans le lot prélevé, au moins un système d'alarme ne fonctionne pas normalement.

PARTIE C

Soit n un entier naturel non nul.

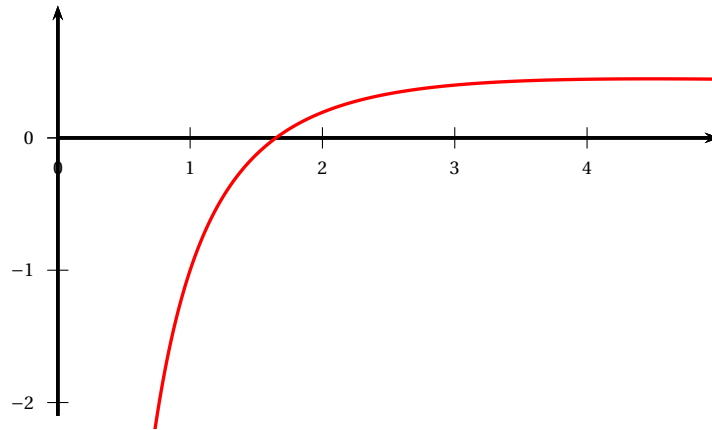
On prélève successivement et au hasard n systèmes d'alarme. Ce prélèvement est assimilé à un tirage avec remise.

Déterminer le plus petit entier n tel que la probabilité d'avoir, dans le lot prélevé, au moins un système d'alarme qui ne fonctionne pas normalement soit supérieure à 0,07.

Partie I

Le graphique ci-dessous donne la représentation graphique dans un repère orthonormé de la fonction f définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2\ln(x) - 1}{x}.$$



1. Déterminer par le calcul l'unique solution α de l'équation $f(x) = 0$.

On donnera la valeur exacte de α ainsi que la valeur arrondie au centième.

2. Préciser, par lecture graphique, le signe de $f(x)$ lorsque x varie dans l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

Partie II

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = [\ln(x)]^2 - \ln(x).$$

1. a. Déterminer la limite de la fonction g en 0.

- b. Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$.

2. On note g' la fonction dérivée de la fonction g sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

Démontrer que, pour tout nombre réel x de $]0 ; +\infty[$, on a : $g'(x) = f(x)$, où f désigne la fonction définie dans la partie I.

3. Dresser le tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

On fera figurer dans ce tableau les limites de la fonction g en 0 et en $+\infty$, ainsi que la valeur du minimum de g sur $]0 ; +\infty[$.

4. Démontrer que, pour tout nombre réel $m > -0,25$, l'équation $g(x) = m$ admet exactement deux solutions.

5. Déterminer par le calcul les deux solutions de l'équation $g(x) = 0$.

Partie A

Le but de la partie A est d'étudier le comportement de la suite (U_n) définie par $U_0 = 0,3$ et par la relation de récurrence, pour tout entier naturel n : $U_{n+1} = 2U_n(1 - U_n)$.

Cette relation de récurrence s'écrit $U_{n+1} = f(U_n)$, où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x(1 - x)$.

1. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $\left[0 ; \frac{1}{2}\right]$.
2. On admet que pour tout entier naturel n , $0 \leq U_n \leq \frac{1}{2}$.

Calculer U_1 puis effectuer un raisonnement par récurrence pour démontrer que pour tout entier naturel n , $U_n \leq U_{n+1}$.

3. En déduire que la suite (U_n) est convergente.
4. Justifier que la limite de la suite (U_n) est égale à $\frac{1}{2}$.

Partie B

Le but de cette partie est d'étudier un modèle d'évolution d'une population.

En 2022, cette population compte 3 000 individus.

On note P_n l'effectif en milliers de la population l'année $2022 + n$. Ainsi $P_0 = 3$.

Selon un modèle inspiré du modèle de Verhulst, mathématicien belge du XIX^e siècle, on considère que, pour tout entier naturel n :

$$P_{n+1} - P_n = P_n(1 - b \times P_n), \quad \text{où } b \text{ est un réel strictement positif.}$$

Le réel b est un facteur de freinage qui permet de tenir compte du caractère limité des ressources du milieu dans lequel évoluent ces individus.

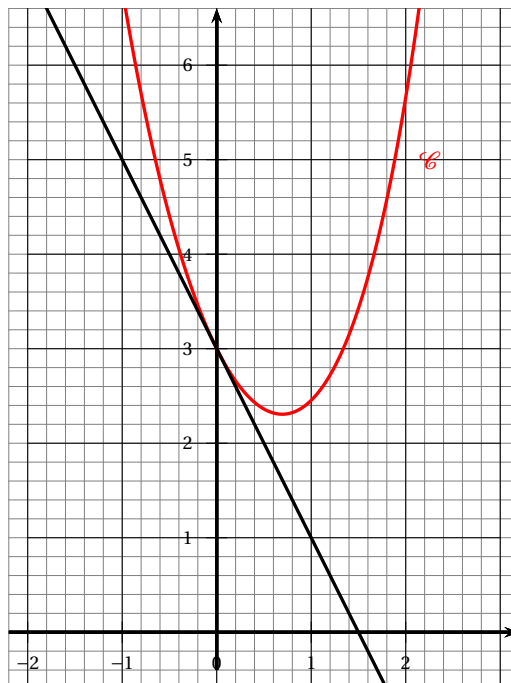
1. Dans cette question $b = 0$.
 - a. Justifier que la suite (P_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
 - b. Déterminer la limite de P_n .
2. Dans cette question $b = 0,2$.
 - a. Pour tout entier naturel n , on pose $V_n = 0,1 \times P_n$.
Calculer V_0 puis montrer que, pour tout entier naturel n , $V_{n+1} = 2V_n(1 - V_n)$.
 - b. Dans ce modèle, justifier que la population se stabilisera autour d'une valeur que l'on précisera.

Partie A : Détermination d'une fonction f et résolution d'une équation différentielle

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^x + ax + be^{-x}$

où a et b sont des nombres réels que l'on propose de déterminer dans cette partie.

Dans le plan muni d'un repère d'origine O , on a représenté ci-dessous la courbe $\mathcal{C}$, représentant la fonction f , et la tangente (T) à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.



1. Par lecture graphique, donner les valeurs de $f(0)$ et de $f'(0)$.
2. En utilisant l'expression de la fonction f , exprimer $f(0)$ en fonction de b et en déduire la valeur de b .
3. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.
 - a. Donner, pour tout réel x , l'expression de $f'(x)$.
 - b. Exprimer $f'(0)$ en fonction de a .
 - c. En utilisant les questions précédentes, déterminer a , puis en déduire l'expression de $f(x)$.
4. On considère l'équation différentielle : (E) : $y' + y = 2e^x - x - 1$
 - a. Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^x - x + 2e^{-x}$ est solution de l'équation (E).
 - b. Résoudre l'équation différentielle $y' + y = 0$.
 - c. En déduire toutes les solutions de l'équation (E).

Partie B : Étude de la fonction g sur $[1 ; +\infty[$

1. Vérifier que pour tout réel x , on a : $e^{2x} - e^x - 2 = (e^x - 2)(e^x + 1)$
2. En déduire une expression factorisée de $g'(x)$, pour tout réel x .
3. On admettra que, pour tout $x \in [1 ; +\infty[$, $e^x - 2 > 0$.

Étudier le sens de variation de la fonction g sur $[1 ; +\infty[$.