A Sur $\mathbb{R}$ $f(x) = \left(x+\frac{1}{2}\right)e^{-x}+x$

1) Limite en $-\infty$:

$\lim\limits_{x\to-\infty} x+\frac{1}{2} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = \lim\limits_{X\to+\infty} e^{X} = +\infty$

Par produit $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\frac{1}{2}\right)e^{-x} = \boxed{-\infty}$

On a $\lim\limits_{x\to-\infty} x = \boxed{-\infty}$

donc par somme $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$

Limite en $+\infty$:

On a $f(x) = \left(x+\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{e^x}+x = \frac{x}{e^x}+\frac{1}{2e^x}+x$

* On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x} = +\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x} = 0}$

* On a $\lim\limits_{x\to+\infty} 2e^x = +\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2e^x} = 0}$

* $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty}$ donc par somme $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$

2) a) $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) = \left(x+\frac{1}{2}\right)e^{-x}+x$

donc $f'(x) = 1\times e^{-x} + \left(x+\frac{1}{2}\right)\times e^{-x}\times(-1) + 1$

$f'(x) = e^{-x} - e^{-x}\left(x+\frac{1}{2}\right) + 1$

$f'(x) = e^{-x}\left(1-x-\frac{1}{2}\right) + 1$

$\boxed{f'(x) = e^{-x}\left(\frac{1}{2}-x\right) + 1}$

donc $f''(x) = -e^{-x}\left(\frac{1}{2}-x\right) + e^{-x}\times(-1)$

$f''(x) = e^{-x}\left(-\left(\frac{1}{2}-x\right)-1\right)$

$f''(x) = e^{-x}\left(-\frac{1}{2}+x-1\right)$

$\boxed{f''(x) = e^{-x}\left(x-\frac{3}{2}\right)}$

2) b) $\forall x \in \mathbb{R}$ $f''(x) = e^{-x}\left(x-\frac{3}{2}\right)$

* $\forall x \in \mathbb{R}$ $e^{-x}>0$ donc $f''(x)$ est du signe de $x-\frac{3}{2}$

* $x \longmapsto x-\frac{3}{2}$ est une fonction affine croissante (car $a=1$) et s'annule en $\frac{3}{2}$

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		↘	$1-e^{-3/2}$	↗	

$f'\left(\frac{3}{2}\right) = e^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\right)+1$
$= -e^{-\frac{3}{2}}+1$

c) On a $e^{-\frac{3}{2}} < e^{0}$ donc $e^{-\frac{3}{2}} < 1$ donc $1-e^{-\frac{3}{2}} > 0$.
Le minimum de f est positif donc $\forall x \in \mathbb{R}$ $f'(x)>0$.

B 1) Le point d'inflexion de f semble avoir pour abscisse $1,5$
(Point de C_f où la courbe traverse la tangente)

2) Le point d'inflexion de C_f est le point où la dérivée seconde s'annule en changeant de signe.

Signe de $h''(x)$:

$\forall x \in \mathbb{R}$ $h''(x) = -\frac{3}{2}e^{-x} + xe^{-x} = e^{-x}\left(-\frac{3}{2}+x\right)$

Rmq : $h''(x) = f''(x)$

donc h'' s'annule en $x = \frac{3}{2}$ en changeant de signe

donc C_h a un unique point d'inflexion qui est le point d'abscisse $\frac{3}{2}$ soit $1,5$

3) Equation de (AB)

$A(-2\,;\,-2{,}5)$ $\quad B(2\,;\,3{,}5)$

$\text{Coeff}(AB) = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{3{,}5+2{,}5}{2+2} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$

donc (AB) a pour équation $y = \frac{3}{2}x + b$.

$A \in (AB)$ donc $y_A = \frac{3}{2}x_A + b$

donc $-2{,}5 = 1{,}5 \times (-2) + b$

donc $b = -2{,}5 + 3$

$\boxed{b = 0{,}5}$ { Vérification sur le graphique !!

donc (AB) a pour équation

$$\boxed{y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}}$$

4) $h(x) = (ax+b)e^{-x} + x$

(AB) est la tangente à C_h au point d'abscisse 0

donc $h'(0) = \text{Coeff}(AB) = \frac{3}{2}$

et $h(0) = \frac{3}{2} \times 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. $\quad$ **

D'après $h(0) = \frac{1}{2}$ on a $be^{-0} = \frac{1}{2}$ donc $\boxed{b = \frac{1}{2}}$

donc $h(x) = \left(ax + \frac{1}{2}\right)e^{-x} + x$

On a $h'(x) = ae^{-x} + \left(ax + \frac{1}{2}\right) \times e^{-x} \times (-1) + 1$

$h'(x) = e^{-x}\left(a - \left(ax + \frac{1}{2}\right)\right) + 1$

$h'(x) = e^{-x}\left(a - ax - \frac{1}{2}\right) + 1$

D'après $h'(0) = \frac{3}{2}$ on a $e^{-0}\left(a - 0 - \frac{1}{2}\right) + 1 = \frac{3}{2}$

donc $a - \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$

$a = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} - 1$ donc $\boxed{a = 1}$

Conclusion : $\boxed{h(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)e^{-x}}$

** la tangente a pour équation $y = h'(0)x + h(0)$

et $y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$

donc par identification : $h'(0) = \frac{3}{2}$ et $h(0) = \frac{1}{2}$