

Calculatrice interdite

Evaluation sur 12 points : 6,5 + 5,5

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x}(1-x) - e$.

On note $\mathcal{C}_f$ la représentation graphique de f dans un repère orthogonal du plan.

1. a. Calculer la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
b. La courbe $\mathcal{C}_f$ admet-elle des asymptotes verticales ou horizontales ? Si oui préciser leur équation.
2. a. Recopier et compléter le tableau de variation suivant après avoir justifié le sens de variation de f .

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	...	...	...

- b. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution sur $\mathbb{R}$ que l'on note α .
- c. Justifier que $\alpha < 0$. On rappelle que $e \simeq 2,7$.
- d. Déterminer le signe de f sur $\mathbb{R}$.

Partie B

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = xe^{-x} - ex$.

On note $\mathcal{C}_g$ la représentation graphique de g .

1. a. Démontrer que g est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
b. En déduire la convexité de g sur $\mathbb{R}$.
2. a. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse 0.
b. Préciser la position de $\mathcal{C}_g$ par rapport à la tangente T sur $]-\infty ; 0]$.
3. Soit a un nombre réel.
a. Démontrer que la tangente T_a à $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse a a pour équation $y = (e^{-a}(1-a) - e)x + a^2e^{-a}$
b. Existe-t-il une valeur de a pour laquelle la tangente T_a passe par le point $A(1 ; -e)$?
4. Démontrer que $g(\alpha) = \frac{\alpha^2 e}{1-\alpha}$