I

Partie A Sur $\mathbb{R}$ $f(x) = e^{-x}(1-x) - e$

1a) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = \lim\limits_{X \to +\infty} e^{X} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (1-x) = +\infty$

donc $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = \lim\limits_{X \to -\infty} e^{X} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (1-x) = -\infty$

FI

On a $f(x) = \dfrac{1-x}{e^x} - e = \dfrac{1}{e^x} - \dfrac{x}{e^x} - e$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$

donc $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -e}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -e$ donc la droite d'équation $y = -e$ est une asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$

2a) $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) = e^{-x}(1-x) - e$

donc $f'(x) = -e^{-x}(1-x) + e^{-x} \times (-1)$

$f'(x) = e^{-x}(-1+x-1)$

$\boxed{f'(x) = e^{-x}(x-2)}$

$\forall x \in \mathbb{R}$ $e^{-x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $x-2$

- $x - 2 = 0 \iff x = 2$
- $x - 2 > 0 \iff x > 2$

x	$-\infty$	α	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$			0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	0		$-e^{-2}-e$	↗ $-e$

$f(2) = e^{-2}(1-2) - e = -e^{-2} - e$

b) Sur $]-\infty, 2]$ f est continue car dérivable

Sur $]-\infty, 2]$ f est strictement décroissante

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

$f(2) = -e^{-2} - e$

$0 \in [-e^{-2} - e ; +\infty[$

donc d'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution sur $]-\infty, 2]$

Sur $[2 ; +\infty[$ $f(x) < 0$ donc l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution sur $[2 ; +\infty[$

Conclusion l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution sur $\mathbb{R}$ que l'on note α

c) $f(0) = e^0(1) - e = 1 - e$ donc $f(0) < 0$.

$0 \in]-\infty, 2]$ et f strictement décroissante sur $]-\infty ; 2]$ avec $f(\alpha) = 0$

donc $f(0) < f(\alpha)$ et donc $\boxed{0 > \alpha}$

d)

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	$+$	0	$-$

Partie B $\forall x \in \mathbb{R}$ $g(x) = xe^{-x} - ex$

1a) $\forall x \in \mathbb{R}$ $g'(x) = 1 \times e^{-x} + x \times e^{-x} \times (-1) - e$

$g'(x) = e^{-x} - xe^{-x} - e$

$g'(x) = e^{-x}(1-x) - e$

donc $g'(x) = f(x)$

donc g est une primitive de f sur $\mathbb{R}$

b) les variations de g' donne la convexité de g

On sait que $g' = f$ donc les variations de f donne la convexité de g

donc

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	↘		↗

donc sur $]-\infty, 2]$ g est concave

et sur $[2 ; +\infty[$ g est convexe

2a) Equation de T :

$$y = g'(0)(x-0) + g(0)$$

$$\boxed{y = (1-e)x}$$

$g(0) = 0$

$g'(0) = e^0(1) - e$

$g'(0) = 1 - e$

b) T est l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse 0

Sur $]-\infty;0]$ g est concave donc sur $]-\infty;0]$ $\mathcal{C}_g$ est en-dessous de T

3) $a \in \mathbb{R}$

a) $T_a : y = g'(a)(x-a) + g(a)$

donc $y = \left(e^{-a}(1-a) - e\right)(x-a) + ae^{-a} - ea$

donc $y = (e^{-a}(1-a) - e)x - a(e^{-a}(1-a) - e) + ae^{-a} - ea$

donc $y = (e^{-a}(1-a) - e)x - ae^{-a}(1-a) + \cancel{ae} + ae^{-a} \cancel{- ea}$

donc $y = (e^{-a}(1-a) - e)x \cancel{- ae^{-a}} + a^2e^{-a} \cancel{+ ae^{-a}}$

donc $\boxed{y = (e^{-a}(1-a) - e)x + a^2e^{-a}}$

b) $A(1;-e)$

$A \in T_a \iff -e = e^{-a}(1-a) - e + a^2e^{-a}$

$\iff e^{-a}(1-a) - e + a^2e^{-a} = 0$

$\iff e^{-a}(1-a+a^2) = 0$

$\iff e^{-a}(a^2 - a + 1) = 0.$

$\forall a \in \mathbb{R}$ $e^{-a} \neq 0.$

donc $A \in T_a \iff a^2 - a + 1 = 0$

On a $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 1 - 4 = -3$

$\Delta < 0$ donc $a^2 - a + 1 = 0$ n'a pas de solution.

donc il n'existe pas de valeur de a pour laquelle T_a passe par A.

4) On a $g(\alpha) = \alpha e^{-\alpha} - e\alpha$

et $f(\alpha) = 0$ donc $e^{-\alpha}(1-\alpha) - e = 0$

$\iff \boxed{e^{-\alpha} = \dfrac{e}{1-\alpha}}$

Donc $g(\alpha) = \alpha \times \dfrac{e}{1-\alpha} - e\alpha$

$g(\alpha) = \dfrac{\alpha e - e\alpha(1-\alpha)}{1-\alpha}$

$g(\alpha) = \dfrac{\alpha e - e\alpha + e\alpha^2}{1-\alpha}$

$g(\alpha) = \dfrac{e\alpha^2}{1-\alpha}$

$$\boxed{g(\alpha) = \frac{\alpha^2 e}{1-\alpha}}$$