

Ex 1 Sur $]3; +\infty[$ $R(x) = \frac{e^x + 1}{3 - x}$

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x + 1 = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3 - x = -\infty$) F.I

$$R(x) = \frac{e^x (1 + \frac{1}{e^x})}{x (\frac{3}{x} - 1)} = \frac{e^x}{x} \times \frac{1 - \frac{1}{e^x}}{\frac{3}{x} - 1}$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{e^x} = \boxed{1}$) Par quotients
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} - 1 = \boxed{-1}$) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{e^x}}{\frac{3}{x} - 1} = \boxed{-1}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = \boxed{+\infty}$ (F.I connue)

Par produit: $\lim_{x \rightarrow +\infty} R(x) = -\infty$

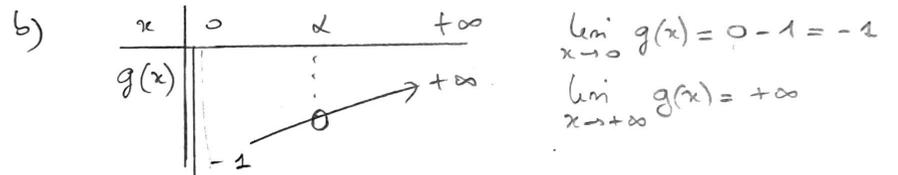
2) $\lim_{x \rightarrow 3} e^x + 1 = \boxed{e^3 + 1}$) Par quotients: $\lim_{x \rightarrow 3} R(x) = -\infty$
 $\lim_{x \rightarrow 3} 3 - x = \boxed{0^-}$) car $e^3 + 1 > 0$
 $x > 3$ donc $3 - x < 0$

3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} R(x) = -\infty$. Pas d'asymptote horizontale)

$\lim_{x \rightarrow 3} R(x) = -\infty$ donc R a une asymptote verticale d'équation $\boxed{x = 3}$

Ex 2 1) Sur $]0; +\infty[$ $g(x) = x^2 e^x - 1$

a) Variation de g sur $]0; +\infty[$
 $g'(x) = 2x e^x + x^2 e^x = e^x (2x + x^2)$
 $\forall x \in]0; +\infty[e^x > 0$ et $2x + x^2 > 0$ donc $g'(x) > 0$
 donc g strictement croissante sur \mathbb{R} .



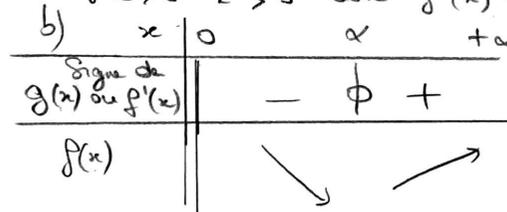
- Sur $]0; +\infty[$ g est continue car dérivable
- Sur $]0; +\infty[$ g est strictement croissante
- $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -1$) $0 \in]-1; +\infty[$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

Donc d'après le corollaire du TVE, l'équation $g(x) = 0$ a une unique solution sur $]0; +\infty[$ donc g s'annule une fois et une seule sur $]0; +\infty[$ (en une valeur notée α).

2) Sur $]0; +\infty[$ $f(x) = e^x + \frac{1}{x}$
 a) Pour $x > 0$ $f'(x) = e^x - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 e^x - 1}{x^2}$

$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

$\forall x > 0$ $x^2 > 0$ donc $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$



La valeur minimale de f est $f(\alpha)$ noté m .

$$\text{On a } f(\alpha) = e^\alpha + \frac{1}{\alpha}$$

$$\text{On sait que } g(\alpha) = 0 \text{ donc } \alpha^2 e^\alpha - 1 = 0$$

$$\text{donc } e^\alpha = \frac{1}{\alpha^2}$$

$$\text{On a donc } \boxed{f(\alpha) = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha}}$$

$$\text{donc } \boxed{m = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha}}$$

$$\boxed{\text{Ex 3}} \text{ Sur } \mathbb{R} \quad f(x) = 2e^{-\frac{1}{3}x}$$

$$1a) (T_0): y = f'(0)(x-0) + f(0)$$

$$\boxed{y = -\frac{2}{3}x + 2}$$

$$\begin{aligned} f(0) &= 2e^0 = 2 \\ f'(x) &= 2e^{-\frac{1}{3}x} \times \left(-\frac{1}{3}\right) \\ f'(0) &= 2e^0 \times \left(-\frac{1}{3}\right) \\ f'(0) &= -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

b) Le point d'intersection de (T_0) avec l'axe des abscisses a pour ordonnée 0 donc $y_k = 0$.

$$\text{et } -\frac{2}{3}x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}x = 2$$

$$\Leftrightarrow 2x = 6$$

$$\Leftrightarrow x = 3$$

On a donc $x_k = 3$

$$\text{donc } \boxed{k(3; 0)}$$

$$2) a) (T_a) \quad y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

$$y = -\frac{2}{3}e^{-\frac{a}{3}}(x-a) + 2e^{-\frac{a}{3}}$$

$$y = -\frac{2}{3}e^{-\frac{a}{3}}x + \frac{2a}{3}e^{-\frac{a}{3}} + 2e^{-\frac{a}{3}}$$

$$y = -\frac{2}{3}e^{-\frac{a}{3}}x + e^{-\frac{a}{3}}\left(\frac{2a}{3} + 2\right)$$

P appartient à l'axe des abscisses donc $y_p = 0$.

$$\text{donc } -\frac{2}{3}e^{-\frac{a}{3}}x + e^{-\frac{a}{3}}\left(\frac{2a}{3} + 2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}e^{-\frac{a}{3}}x = e^{-\frac{a}{3}}\left(\frac{2a}{3} + 2\right) \quad \left. \vphantom{\frac{2}{3}e^{-\frac{a}{3}}x} \right\} : e^{-\frac{a}{3}} \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}x = \frac{2a}{3} + 2$$

$$\Leftrightarrow 2x = 2a + 6$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x = a + 3}$$

$$\text{donc } \boxed{x_p = a + 3}$$

b) Soit (T_{-2}) on a $a = -2$ donc $x_p = 1$.
 Par trace (T_{-2}) on relie le point A de G_f d'abscisse -2 au point P de coordonnées (1; 0)