Ex 1 Sur $]3;+\infty[$ $h(x) = \dfrac{e^x+1}{3-x}$

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x+1 = +\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty} 3-x = -\infty$ } FI

$$h(x) = \frac{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}{x\left(\frac{3}{x}-1\right)} = \frac{e^x}{x} \times \frac{1-\frac{1}{e^x}}{\frac{3}{x}-1}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} 1-\dfrac{1}{e^x} = \boxed{1}$
$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{x}-1 = \boxed{-1}$ } Par quotient $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-\frac{1}{e^x}}{\frac{3}{x}-1} = \boxed{-1}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = \boxed{+\infty}$ (FI connue)

Par produit : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = -\infty}$

2) $\lim\limits_{x\to 3} e^x+1 = \boxed{e^3+1}$
$\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}} 3-x = \boxed{0^-}$ } Par quotient $\boxed{\lim\limits_{x\to 3} h(x) = -\infty}$ car $e^3+1>0$

$x>3$ donc $3-x<0$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = -\infty$. Pas d'asymptote horizontale)

$\lim\limits_{x\to 3} h(x) = -\infty$ donc $\mathcal{C}_h$ a une asymptote verticale d'équation $\boxed{x=3}$

Ex 2 1) Sur $]0;+\infty[$ $g(x) = x^2e^x - 1$

a) Variation de g sur $]0,+\infty[$

$g'(x) = 2xe^x + x^2e^x = e^x(2x+x^2)$

$\forall x \in]0;+\infty[$ $e^x>0$ et $2x+x^2>0$ donc $f'(x)>0$

donc f strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

b)

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0-1 = -1$
$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

- Sur $]0;+\infty[$ g est continue car dérivable
- Sur $]0;+\infty[$ g est strictement croissante
- $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ } $0 \in]-1;+\infty[$

Donc d'après le corollaire du TVI, l'équation $g(x)=0$ a une unique solution sur $]0,+\infty[$ donc g s'annule une fois et une seule sur $]0,+\infty[$ en une valeur notée α

2) Sur $]0;+\infty[$ $f(x) = e^x + \dfrac{1}{x}$

a) Pour $x>0$ $f'(x) = e^x - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2e^x-1}{x^2}$

$$\boxed{f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}}$$

$\forall x>0$ $x^2>0$ donc $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$

b)

x	0		α		$+\infty$
Signe de $g(x)$ ou $f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

La valeur minimale de f est $f(\alpha)$ noté m.

On a $f(\alpha) = e^{\alpha} + \frac{1}{\alpha}$

On sait que $g(\alpha) = 0$ donc $\alpha^2 e^{\alpha} - 1 = 0$

donc $e^{\alpha} = \frac{1}{\alpha^2}$

On a donc $\boxed{f(\alpha) = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha}}$

donc $\boxed{m = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha}}$

Ex 3 Sur $\mathbb{R}$ $f(x) = 2e^{-\frac{1}{3}x}$

1a) (T_0) : $y = f'(0)(x-0) + f(0)$

$\boxed{y = -\frac{2}{3}x + 2}$

$f(0) = 2e^0 = 2$

$f'(x) = 2e^{-\frac{1}{3}x} \times \left(-\frac{1}{3}\right)$

$f'(0) = 2e^0 \times \left(-\frac{1}{3}\right)$

$f'(0) = -\frac{2}{3}$

b) Le point K d'intersection de (T_0) avec l'axe des abscisses a pour ordonnée 0 donc $y_K = 0$.

et : $-\frac{2}{3}x + 2 = 0$

$\iff \frac{2}{3}x = 2$

$\iff 2x = 6$

$\iff x = 3$

On a donc $x_K = 3$

donc $\boxed{K(3\,;0)}$

2) a) (T_a) $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

$y = -\frac{2}{3}e^{-\frac{a}{3}}(x-a) + 2e^{-\frac{a}{3}}$

$y = -\frac{2}{3}e^{-\frac{a}{3}}x + \frac{2a}{3}e^{-\frac{a}{3}} + 2e^{-\frac{a}{3}}$

$y = -\frac{2}{3}e^{-\frac{a}{3}}x + e^{-\frac{a}{3}}\left(\frac{2a}{3} + 2\right)$

P appartient à l'axe des abscisses donc $y_P = 0$.

donc $-\frac{2}{3}e^{-\frac{a}{3}}x + e^{-\frac{a}{3}}\left(\frac{2a}{3} + 2\right) = 0$

$\iff \frac{2}{3}e^{-\frac{a}{3}}x = e^{-\frac{a}{3}}\left(\frac{2a}{3} + 2\right)$ $: e^{-\frac{a}{3}} \neq 0$

$\iff \frac{2}{3}x = \frac{2a}{3} + 2$

$\iff 2x = 2a + 6$

$\iff \boxed{x = a + 3}$

donc $\boxed{x_P = a + 3}$

b) Soit (T_{-2}) on a $a = -2$ donc $x_P = 1$.

Pour tracer (T_{-2}) on relie le point A de C_f d'abscisse -2 au point P de coordonnées $(1\,;0)$