$\boxed{\text{Ex 1}}$ $U_0 = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $U_{n+1} = \frac{1}{4}U_n + \frac{3}{4}n + 1$

$\boxed{A}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $P(n) : n < U_n < n + \frac{4}{3}$

① Soit $n = 0$ $U_n = U_0 = 1$

$n + \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$ donc $0 < U_0 < \frac{4}{3}$

donc $P(n)$ vrai pour $n = 0$

② Soit $n \geq 0$ on va démontrer que si $P(n)$ est vrai alors $P(n+1)$ est vrai

donc on va démontrer que si $n < U_n < n + \frac{4}{3}$

alors $n+1 < U_{n+1} < n + 1 + \frac{4}{3}$

Si $n < U_n < n + \frac{4}{3}$

alors $\frac{1}{4}n < \frac{1}{4}U_n < \frac{1}{4}\left(n + \frac{4}{3}\right)$ $\times \frac{1}{4}$ ⊕

alors $\frac{1}{4}n + \frac{3}{4}n + 1 < \frac{1}{4}U_n + \frac{3}{4}n + 1 < \frac{1}{4}n + \frac{1}{3} + \frac{3}{4}n + 1$

alors $n + 1 < U_{n+1} < n + \frac{4}{3}$

or $n + \frac{4}{3} < n + 1 + \frac{4}{3}$ donc $n + 1 < U_{n+1} < n + 1 + \frac{4}{3}$

③ D'après le principe de raisonnement par récurrence CQFD

pour tout $n \geq 0$ $n < U_n < n + \frac{4}{3}$

2) $\forall n \in \mathbb{N}$ $n < U_n$ avec $\lim_{n \to +\infty} n = +\infty$

donc d'après le théorème de comparaison $\lim_{n \to +\infty} U_n = +\infty$

3) $\forall n \in \mathbb{N}$ $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{4}U_n + \frac{3}{4}n + 1 - U_n$

$= -\frac{3}{4}U_n + \frac{3}{4}n + 1$

$= \frac{3}{4}\left(-U_n + n + \frac{4}{3}\right)$

$U_{n+1} - U_n = \frac{3}{4}\left(n + \frac{4}{3} - U_n\right)$

4) Signe de $U_{n+1} - U_n$ ?

D'après 1) $\forall n \in \mathbb{N}$ $n < U_n < n + \frac{4}{3}$ donc $n + \frac{4}{3} - U_n > 0$.

donc $\frac{3}{4}\left(n + \frac{4}{3} - U_n\right) > 0$

donc $U_{n+1} - U_n > 0$

donc $(U_n)$ est croissante.

5) La suite $(U_n)$ est croissante, si elle était majorée, elle serait convergente. La suite $(U_n)$ étant divergente elle ne peut donc pas être majorée.

$\boxed{B}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $V_n = U_n - n$

1) $V_{n+1} = U_{n+1} - (n+1) = \frac{1}{4}U_n + \frac{3}{4}n + 1 - n - 1$

$= \frac{1}{4}U_n - \frac{1}{4}n$

$= \frac{1}{4}(U_n - n)$

donc $\boxed{V_{n+1} = \frac{1}{4}V_n}$

donc $(V_n)$ est géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et de premier terme $V_0$ avec $V_0 = U_0 - 0$

$\boxed{V_0 = 1}$

2) $\forall n \in \mathbb{N}$ $V_n = V_0 \times q^n$

$V_n = 1 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n = \left(\frac{1}{4}\right)^n$

$\forall n \in \mathbb{N}$ $V_n = U_n - n$ donc $U_n = V_n + n$

donc $\boxed{U_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n + n}$

On a $-1 < \frac{1}{4} < 1$ donc $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$

On a $\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n + n = \boxed{+\infty}$

12

Ex2

(d) : $\begin{cases} x = -2+4k \\ y = -5+2k \\ z = -3k \end{cases}$ $k \in \mathbb{R}$

1) $A(-5\,;-8\,;2)$

Peut-on trouver une valeur de k telle que $\begin{cases} -2+4k=-5 \\ -5+2k=-8 \\ -3k=2 \end{cases}$ ? (noté S)

$S \iff \begin{cases} 4k=-3 \\ 2k=-3 \\ k=-\frac{2}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} k=-\frac{3}{4} \\ k=-\frac{3}{2} \\ k=-\frac{2}{3} \end{cases}$

donc k n'existe pas. donc A n'appartient pas à (d)

2) (d) a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

3) $a \in \mathbb{R}$ $\quad B_a(3\,;-4\,;a)$

$\overrightarrow{AB_a}\begin{pmatrix} 3+5 \\ -4+8 \\ a-2 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AB_a}\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ a-2 \end{pmatrix}$

$(AB_a) \,//\, (d) \iff \overrightarrow{AB_a}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires

$\iff \overrightarrow{AB_a} = 2\vec{u}$

$\iff a-2=-6$

$\iff \boxed{a=-4}$

4) Un point $M(x,y,z)$ appartient à E si et seulement si

$2x+y+2z=0$

Pour déterminer le point de (d) qui appartient à E, on cherche la valeur de k tel que

$2(-2+4k)+(-5+2k)+2(-3k)=0$

$\iff -4+8k-5+2k-6k=0$

$\iff 4k-9=0$

$\iff k=\frac{9}{4}$

On a $x_k=-2+4k=-2+4\times\frac{9}{4}=-2+ \ldots =$

$y_k=-5+2k=-5+2\times\frac{9}{4}=-5+\frac{9}{2}=-\frac{1}{2}$

$z_k=-3k=-3\times\frac{9}{4}=\boxed{-\frac{27}{4}}$

$\boxed{K\left(7\,;-\frac{1}{2}\,;-\frac{27}{4}\right)}$