

Calculatrice interdite

Exercice 1

9 points

Soit la suite (U_n) définie par $U_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = \frac{1}{4}U_n + \frac{3}{4}n + 1$

Partie A

1. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $n < U_n < n + \frac{4}{3}$
2. En déduire que la suite (U_n) admet une limite que l'on précisera.
3. Démontrer que pour tout entier naturel n , $U_{n+1} - U_n = \frac{3}{4} \left(n + \frac{4}{3} - U_n \right)$
4. En déduire que la suite (U_n) est croissante.
5. La suite (U_n) peut-elle être majorée ?

Partie B

Soit la suite (V_n) définie pour tout entier naturel n par $V_n = U_n - n$.

1. Démontrer que la suite (V_n) est géométrique.
2. En déduire une expression de U_n en fonction de n , puis retrouver la limite de la suite (U_n) trouvée dans la partie A.

Exercice 2

6 points

La rédaction et les justifications sont prises en compte dans la notation.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère la droite (d) dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = -2 + 4k \\ y = -5 + 2k \\ z = -3k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$$

1. Le point $A(-5; -8; 2)$ appartient-il à la droite (d) ?
2. Déterminer un vecteur directeur de la droite (d) .
3. Soit a un réel et le point $B_a(3; -4; a)$.

Déterminer la valeur de a pour laquelle la droite (AB_a) est parallèle à la droite (d) .

4. On note E l'ensemble des points de coordonnées $(x; y; z)$ qui vérifient la relation $2x + y + 2z = 0$.

On admet que E et (d) ont un point commun.

Déterminer les coordonnées du point K de la droite (d) qui appartient à E .