$\boxed{\text{Ex 1}}$ $a_0 = 4$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_{n+1} = \frac{1}{5} a_n^2$

$\forall n \in \mathbb{N}$ $0 < a_n \leq 4$

1) $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{5} a_n^2 - a_n = a_n\left(\frac{1}{5} a_n - 1\right)$

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\boxed{a_n > 0}$ (1)

$\forall n \in \mathbb{N}$ $0 < a_n \leq 4$

donc $0 < \frac{1}{5} a_n \leq \frac{4}{5}$

donc $-1 < \frac{1}{5} a_n - 1 \leq -\frac{1}{5}$

donc $\boxed{\frac{1}{5} a_n - 1 < 0}$ (2)

Par produit de (1) et (2) $a_{n+1} - a_n < 0$

donc (a_n) est décroissante.

2) (a_n) est décroissante et minorée (par 0) donc elle converge.

3) $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \ell$ On a $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_{n+1} = \frac{1}{5} a_n^2$

Par passage à la limite :

$$\lim_{n \to +\infty} a_{n+1} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{5} a_n^2$$

$$\Leftrightarrow \ell = \frac{1}{5} \ell^2$$

$$\Leftrightarrow \ell - \frac{1}{5} \ell^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \ell\left(1 - \frac{1}{5}\ell\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ell = 0 \text{ ou } 1 - \frac{1}{5}\ell = 0$$

$$\Leftrightarrow \ell = 0 \text{ ou } 1 = \frac{1}{5}\ell$$

$$\Leftrightarrow \ell = 0 \text{ ou } \ell = 5$$

$\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n \leq 4$ donc $\ell = 5$ est impossible

donc $\ell = 0$

et $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0}$

(2)

$\boxed{\text{Ex 2}}$ $U_0 = 3$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $U_{n+1} = \frac{1}{2} U_n + \frac{1}{2} n + 1$

1a) $\forall n \in \mathbb{N}$ $\mathcal{P}(n)$: $n \leq U_n \leq n+3$

① Soit $n = 0$ $U_n = U_0 = 3$ On a $0 \leq U_0 \leq 3$

$n + 3 = 3$ donc $\mathcal{P}(n)$ vrai pour $n = 0$

② Soit $n \geq 0$ on va démontrer que si $\mathcal{P}(n)$ est vrai alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vrai

On va donc démontrer que si $n \leq U_n \leq n+3$

alors $n+1 \leq U_{n+1} \leq n+4$

On a : $n \leq U_n \leq n+3$

donc $\frac{1}{2} n \leq \frac{1}{2} U_n \leq \frac{1}{2}(n+3)$ $) \times \frac{1}{2}$ ⊕.

donc $\frac{1}{2} n + \frac{1}{2} n + 1 \leq \frac{1}{2} U_n + \frac{1}{2} n + 1 \leq \frac{1}{2}(n+3) + \frac{1}{2} n + 1$

càd $n + 1 \leq U_{n+1} \leq \frac{1}{2} n + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} n + 1$

càd $n + 1 \leq U_{n+1} \leq n + \frac{5}{2}$ or $n + \frac{5}{2} \leq n + 4$

donc $n + 1 \leq U_{n+1} \leq n + 4$ CQFD

③ D'après le principe de raisonnement par récurrence pour tout $n \geq 0$ $n \leq U_n \leq n+3$.

b) $\forall n \in \mathbb{N}$ $n \leq U_n$ avec $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$

donc d'après le théorème de comparaison $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty}$

et $\forall n > 0$ $n \leq U_n \leq n+3$

et donc $\forall n > 0$ $1 \leq \frac{U_n}{n} \leq 1 + \frac{3}{n}$.

avec $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + \frac{3}{n} = 1$

donc d'après le théorème d'encadrement $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{U_n}{n} = 1}$

2a) $\forall n \in \mathbb{N}$ $V_n = U_n - n$.

a) $\forall n \in \mathbb{N}$ $V_{n+1} = U_{n+1} - (n+1) = \frac{1}{2}U_n + \frac{1}{2}n + 1 - n - 1$

$= \frac{1}{2}U_n - \frac{1}{2}n$

$= \frac{1}{2}(U_n - n)$

$\boxed{V_{n+1} = \frac{1}{2} V_n}$

donc (V_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme V_0 avec $V_0 = U_0 - 0$ $\boxed{V_0 = 3}$

b) $\forall n \in \mathbb{N}$ $V_n = V_0 \times q^n$ donc $\boxed{V_n = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n}$

et $V_n = U_n - n$ donc $U_n = V_n + n$

$\boxed{U_n = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + n}$

c) On a $-1 < \frac{1}{2} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + n = +\infty$

donc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty}$

15

Ex 3 $A(-1, 3, -4)$ $B(4, 5, -6)$

(d_1) : $\begin{cases} x = 2 + 2{,}5k \\ y = 3 + k \\ z = -1 - k \end{cases}$ $k \in \mathbb{R}$

1a) Vecteur directeur de (AB) : $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

Vecteur directeur de (d_1) : $\vec{u} \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

On a $\overrightarrow{AB} = 2\vec{u}$

donc (AB) et (d_1) sont parallèles

b) A appartient-il à (d_1) ?

Peut-on trouver k tel que $\begin{cases} 2 + 2{,}5k = -1 \\ 3 + k = 3 \\ -1 - k = -4 \end{cases}$? (noté S)

$S \iff \begin{cases} 2{,}5k = -3 \\ k = 0 \\ k = 3 \end{cases}$ k n'existe pas

donc $A \notin (d_1)$

donc (AB) et (d_1) ne sont pas confondues

2) (d_2) : $\begin{cases} x = 11 - t \\ y = -3 + 2t \\ z = 5 - 2t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$

a) $y_C = -5$ et $C \in (d_2)$ donc $-3 + 2t = -5$

$\iff 2t = -2$

$\iff t = -1$

donc $x_C = 11 - t = 11 + 1 = 12$

$y_C = -5$

$z_C = 5 - 2t = 5 + 2 = 7$

donc $\boxed{C(12 ; -5 ; 7)}$

b) K point d'intersection de (d_1) et (d_2)

$\begin{cases} 2 + 2{,}5k = 11 - t \\ 3 + k = -3 + 2t \\ -1 - k = 5 - 2t \end{cases}$

$\iff \begin{cases} 2{,}5k + t = 9 \\ k - 2t = -6 \\ -k + 2t = 6 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} 2{,}5k + t = 9 \\ k - 2t = -6 \\ 0 = 0 \end{cases}$ $L_2 + L_3$

$\iff \begin{cases} 2{,}5k + t = 9 \\ 6k = 12 \end{cases}$ $-2L_1 + L_2$

$\iff \begin{cases} 2{,}5 \times 2 + t = 9 \\ k = 2 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} t = 4 \\ k = 2 \end{cases}$

Pour $k = 2$

$x = 7$

$y = 5$

$z = -3$

$\boxed{K(7 ; 5 ; -3)}$

Vérification : Pour $t = 4$

$x = 7$

$y = 5$

$z = -3$