

Calculatrice interdite

Exercice 1

4 points

Soit (a_n) la suite définie par $a_0 = 4$ et, pour tout entier naturel n , $a_{n+1} = \frac{1}{5}a_n^2$.

On admet que pour tout entier naturel n , $0 < a_n \leq 4$.

1. Démontrer que la suite (a_n) est décroissante.
2. En déduire que la suite (a_n) est convergente.
3. On note ℓ la limite de la suite (a_n) . Déterminer la valeur de ℓ .

Exercice 2

7 points

On considère la suite (U_n) définie par $U_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n , $U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + \frac{1}{2}n + 1$.

1.
 - a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $n \leq U_n \leq n + 3$.
 - b. En déduire la limite de la suite (U_n) et la limite de la suite $\left(\frac{U_n}{n}\right)$.
2. Soit la suite (V_n) définie, pour tout entier naturel n , par $V_n = U_n - n$.
 - a. Démontrer que (V_n) est géométrique.
 - b. En déduire l'expression de V_n puis U_n en fonction de n .
 - c. Retrouver la limite de la suite (U_n) trouvée précédemment.

Exercice 3

5 points

La rédaction et les justifications sont prises en compte dans la notation.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère :

- les points $A(-1 ; 3 ; -4)$ et $B(4 ; 5 ; -6)$;
- la droite (d_1) dont une représentation paramétrique est :
$$\begin{cases} x = 2 + 2,5k \\ y = 3 + k \\ z = -1 - k \end{cases}, k \in \mathbb{R}.$$

1.
 - a. Démontrer que les droites (AB) et (d_1) sont parallèles.
 - b. Les droites (AB) et (d_1) sont-elles confondues ?

2. Soit la droite (d_2) dont une représentation paramétrique est :
$$\begin{cases} x = 11 - t \\ y = -3 + 2t \\ z = 5 - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

- a. Déterminer les coordonnées du point C de (d_2) qui a pour ordonnée -5 .
- b. On admet que les droites (d_1) et (d_2) sont sécantes. Déterminer les coordonnées de leur point d'intersection K.