1. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-\ln x$ F.I. de la forme $+\infty-\infty$

On a : $x^2-\ln x = x\left(x-\dfrac{\ln x}{x}\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x = \boxed{+\infty}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x-\dfrac{\ln x}{x} = \boxed{+\infty}$

Par produit : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(x-\dfrac{\ln x}{x}\right) = \boxed{+\infty}$

donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-\ln x = +\infty}$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} x-5\ln x$ F.I. de la forme $+\infty-\infty$

On a : $x-5\ln x = x\left(1-5\times\dfrac{\ln x}{x}\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x = \boxed{+\infty}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-5\times\dfrac{\ln x}{x} = \boxed{1}$

Par produit : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1-5\times\dfrac{\ln x}{x}\right) = \boxed{+\infty}$

donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} x-5\ln x = +\infty}$

3. Soit $a<0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x)-ax$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = \boxed{+\infty}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} -ax = \boxed{+\infty}$

Par somme : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x)-ax = +\infty}$

4. Soit $a>0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x)-ax$ F.I. de la forme $+\infty-\infty$

On a : $\ln(x)-ax = x\left(\dfrac{\ln x}{x}-a\right)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} x = \boxed{+\infty}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x}-a = \boxed{-a}$

Par produit : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\dfrac{\ln x}{x}-a\right) = \boxed{-\infty}$

donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x)-ax = -\infty}$

5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x+2}$ F.I. de la forme $\dfrac{+\infty}{+\infty}$

On a $\dfrac{\ln x}{x+2} = \dfrac{\ln x}{x\left(1+\dfrac{2}{x}\right)} = \dfrac{\ln x}{x}\times\dfrac{1}{1+\dfrac{2}{x}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = \boxed{0}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\dfrac{2}{x} = 1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{1+\dfrac{2}{x}} = \boxed{1}$

Par produit : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x}\times\dfrac{1}{1+\dfrac{2}{x}} = \boxed{0}$

donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x+2} = 0}$