BB Sujet 1

$a \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{Ex 1}}$ $A(0;4;-1)$ $B(6;1;5)$ $C(a;-2;-1)$

1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\-3\\6\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}a\\-6\\0\end{pmatrix}$

$y_{\overrightarrow{AB}} \times 2 = y_{\overrightarrow{AC}}$ mais $z_{\overrightarrow{AB}} \times 2 \neq z_{\overrightarrow{AC}}$

donc pour toutes les valeurs de a, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et donc les points A, B, C ne sont pas alignés

donc <u>VRAI</u>

2) $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$

Cette droite a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\-3\\6\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB} = 3\vec{u}$

donc cette droite et (AB) sont parallèles.

<u>A appartient-il à cette droite</u> ? $A(0;4;-1)$

Peut-on trouver une valeur de t telle que

$\begin{cases} 2 + 2t = 0 \\ 3 - t = 4 \\ 1 + 2t = -1 \end{cases}$? On note S ce système.

$S \Leftrightarrow \begin{cases} 2t = -2 \\ -t = 1 \\ 2t = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = -1 \\ t = -1 \end{cases}$

Donc oui A appartient à cette droite donc ces deux droites sont confondues. donc <u>l'affirmation 2 est vraie</u>

$(d_1) : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 + t \\ z = 2 + t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$ $(d_2) : \begin{cases} x = 2k \\ y = 4 - k \\ z = -1 - 2k \end{cases}$ $t' \in \mathbb{R}$.

3) $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}a-6\\-3\\-6\end{pmatrix}$

(d_2) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}$

$(BC) \parallel (d_2) \Leftrightarrow \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{u_2}$ sont colinéaires.

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{u_2}$

$\Leftrightarrow a - 6 = 6$

$\Leftrightarrow a = 12$

donc <u>l'affirmation 3 est vraie</u>

4) (d_1) et (d_2) sont sécantes si et seulement si le système noté S

$\begin{cases} 3 + t = 2k \\ 1 + t = 4 - k \\ 2 + t = -1 - 2k \end{cases}$ a une solution

$S \Leftrightarrow \begin{cases} t - 2k = -3 \\ t + k = 3 \\ t + 2k = -3 \end{cases} \underset{\substack{L_2 - L_1 \\ L_3 - L_1}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} t - 2k = 3 \\ 3k = 6 \\ 4k = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t - 2k = 3 \\ k = 2 \\ k = 0 \end{cases}$.

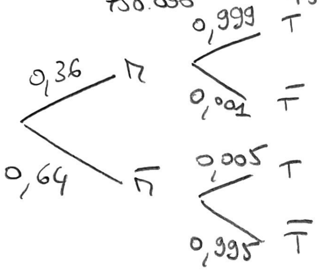
Deux valeurs de k différentes donc (d_1) et (d_2) ne sont pas sécantes donc <u>l'affirmation 4 est fausse</u>

Ex2 Partie A.

1) $\boxed{P_M(T) = 0,999 \qquad P_{\bar{M}}(T) = 0,005}$

2) $P(M) = \frac{270\,000}{750\,000} = \frac{27}{75} = \boxed{\frac{9}{25}} = \frac{36}{100} = \boxed{0,36}$

3)



4) $P(M\cap T) = P(M) \times P_M(T) = 0,36 \times 0,999 \simeq \boxed{0,360}$

5) $P(T) = P(M\cap T) + P(\bar{M}\cap T)$ d'après la formule des probabilités totales.

donc $P(T) = 0,36\times 0,999 + 0,64\times 0,005$

$\boxed{P(T) \simeq 0,363}$

6) $P_T(M) = \frac{P(M\cap T)}{P(T)} = \frac{0,36\times 0,999}{0,36\times 0,999 + 0,64\times 0,005}$

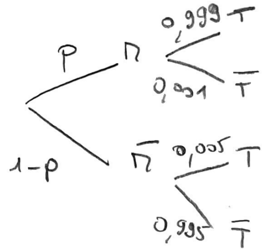
$\boxed{P_T(M) \simeq 0,991}$

7) le test est fiable si $P_T(M) > 0,95$

donc oui le test est fiable

Partie B

1)



2) $P(T) = P(M\cap T) + P(\bar{M}\cap T)$

$= p\times 0,999 + (1-p)\times 0,005$

$= 0,999p + 0,005 - 0,005p$

$P(T) = 0,994p + 0,005$

3) $P_T(M) = \frac{P(T\cap M)}{P(T)} = \frac{0,999p}{0,994p + 0,005} \overset{\times 1000}{=} \frac{999p}{994p+5}$

4) le test est fiable si $P_T(M) > 0,95$

On a $P_T(M) > 0,95$

$\iff \frac{999p}{994p+5} > 0,95$

$\iff 999p > 0,95(994p+5)$

$\iff 999p > 944,3p + 4,75$

$\iff 54,7p > 4,75$

$\iff p > \frac{4,75}{54,7}$

$\iff \boxed{p > \frac{47,5}{547}}$ or $\frac{47,5}{547} \simeq 0,086.$

Partie C X suit la loi $\mathcal{B}(10\,;\,0,36)$

1) $P(X=5) = \binom{10}{5}\times 0,36^5 \times 0,64^5 \simeq \boxed{0,164}$

2) $P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - 0,64^{10} \simeq \boxed{0,988}$

40.

$\boxed{\text{Ex 3}}$ Sur $\mathbb{R}$ $f(x) = xe^{-x} + 2x - 1$

Partie A

$f(x) = \frac{x}{e^x} + 2x - 1$

1) En $-\infty$:

$\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0^+$

Par quotient $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x}{e^x} = \boxed{-\infty}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} 2x - 1 = \boxed{-\infty}$ donc par somme $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty}$

En $+\infty$:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = \boxed{0}$ car on sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = \infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} 2x - 1 = \boxed{+\infty}$ donc par somme $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$

2) a) $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) = xe^{-x} + 2x - 1$

donc $\boxed{f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} + 2}$

b) $\forall x \in \mathbb{R}$ $f''(x) = -e^{-x} - \left(e^{-x} + x \times (-e^{-x})\right)$

$f''(x) = -e^{-x} - e^{-x} + xe^{-x}$

$\boxed{f''(x) = (x-2)\,e^{-x}}$

c) $\forall x \in \mathbb{R}$ $e^{-x} > 0$

donc $f''(x)$ est du signe de $x - 2$.

On a $x - 2 = 0 \iff x = 2$

$x - 2 > 0 \iff x > 2$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

Donc sur $]-\infty ; 2]$ f est concave

et sur $[2 ; +\infty[$ f est convexe

d) les variations de f' s'obtiennent à partir du signe de f''

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$\searrow$	$2 - e^{-2}$	$\nearrow$	

$f'(2) = e^{-2} - 2e^{-2} + 2$

$f'(2) = -e^{-2} + 2$

$f'(2) \simeq 1{,}86$

e) le minimum de f' est positif donc pour tout x de $\mathbb{R}$

$f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

3 a)

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Sur $\mathbb{R}$ f est continue car dérivable et f est strictement croissante.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$0 \in \,]-\infty ; +\infty[$

D'après le corollaire du TVI l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution sur $\mathbb{R}$ que l'on note α.

b) $\boxed{0{,}37 < \alpha < 0{,}38}$

car $f(0{,}37) < 0$

$f(0{,}38) > 0$

Rmq : $f(0) = -1$ donc on cherche α sur l'intervalle $[-1, 5]$ par exemple

Partie B

On commence par chercher a tels que : $f'(a) = 2$ pour que le coefficient directeur de la tangente soit 2.

$f'(a) = 2 \iff e^{-a} - a e^{-a} + 2 = 2$

$\iff e^{-a} - a e^{-a} = 0$

$\iff e^{-a}(1-a) = 0$ $\quad$ $\forall a \in \mathbb{R}$

$\iff 1 - a = 0$ $\quad$ car $e^{-a} \neq 0$.

$\iff a = 1$

La tangente au point d'abscisse 1 passe t-elle par $B\left(0 ; \frac{1-e}{e}\right)$?

Pour cela on détermine une équation de la tangente.

$y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$y = 2(x-1) + e^{-1} + 1$

$\boxed{y = 2x + e^{-1} - 1}$

$f'(x) = e^{-x} - x e^{-x} + 2$

$f'(1) = e^{-1} - e^{-1} + 2$

$\boxed{f'(1) = 2}$

$f(x) = x e^{-x} + 2x - 1$

$f(1) = e^{-1} + 1$

B appartient à la tangente si

$2x_B + e^{-1} - 1 = y_B$

On a : $2x_B + e^{-1} - 1 = e^{-1} - 1 = \frac{1}{e} - 1 = \frac{1-e}{e} = y_B$

donc B appartient à la tangente.

L'affirmation est donc vraie.

$\boxed{\text{Ex 4}}$ $\quad U_0 = 8 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad U_{n+1} = \frac{6U_n + 2}{U_n + 5}$

1) Calculer U_1 :

$U_1 = \frac{6U_0 + 2}{U_0 + 5} = \boxed{\frac{50}{13}}$

2) Sur $[0 ; +\infty[$ $\quad f(x) = \frac{6x+2}{x+5}$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad U_{n+1} = f(U_n)$

a) Si $x > 2$ alors $f(x) > f(2)$ car f strictement croissante sur $[0, +\infty[$

On a $f(2) = \frac{14}{7} = 2$ donc $\boxed{f(x) > 2}$

b) $\mathcal{P}(n)$: $U_n > 2$

① Pour $n = 0$ $\quad U_0 = 8$ donc $U_0 > 2$

donc $\mathcal{P}(n)$ vraie pour $n = 0$

② Soit $n \geq 0$ on va démontrer que si $\mathcal{P}(n)$ est vrai alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vrai. On va donc démontrer que si $U_n > 2$ alors $U_{n+1} > 2$

Si $U_n > 2$ alors $f(U_n) > 2$ d'après a)

donc $U_{n+1} > 2$ $\quad$ CQFD

③ D'après le principe de raisonnement par récurrence pour tout $n \geq 0$ $U_n > 2$

3) $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_{n+1} - U_n = \frac{(2-U_n)(U_n+1)}{U_n+5}$

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad U_n > 2$ donc $2 - U_n < 0$ et $U_n + 1 > 0$

et $U_n + 5 > 0$

donc $U_{n+1} - U_n < 0$

donc (U_n) est décroissante

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad U_n > 2$ donc (U_n) est minorée par 2

Conclusion (U_n) est décroissante et minorée donc elle converge vers un nombre l tel que $l \geq 2$

4) $\forall n \in \mathbb{N} \quad V_n = \dfrac{U_n - 2}{U_n + 1}$

a) $V_0 = \dfrac{U_0 - 2}{U_0 + 1} = \dfrac{6}{9} = \boxed{\dfrac{2}{3}}$

b) $\forall n \in \mathbb{N} \quad V_{n+1} = \dfrac{U_{n+1} - 2}{U_{n+1} + 1} = \dfrac{\dfrac{6U_n + 2}{U_n + 5} - 2}{\dfrac{6U_n + 2}{U_n + 5} + 1}$

$V_{n+1} = \dfrac{\dfrac{6U_n + 2 - 2(U_n + 5)}{U_n + 5}}{\dfrac{6U_n + 2 + (U_n + 5)}{U_n + 5}}$

$V_{n+1} = \dfrac{6U_n + 2 - 2U_n - 10}{6U_n + 2 + U_n + 5} = \dfrac{4U_n - 8}{7U_n + 7}$

$V_{n+1} = \dfrac{4(U_n - 2)}{7(U_n + 1)} = \dfrac{4}{7} V_n$

donc (V_n) est géométrique de raison $\dfrac{4}{7}$ et de premier terme $V_0 = \dfrac{2}{3}$

c) $\forall n \in \mathbb{N} \quad V_n = V_0 \times q^n$

$V_n = \dfrac{2}{3} \times \left(\dfrac{4}{7}\right)^n$

$-1 < \dfrac{4}{7} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{4}{7}\right)^n = 0$ et $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = 0}$

d) $\forall n \in \mathbb{N} \quad V_n = \dfrac{U_n - 2}{U_n + 1}$ (U_n) converge. On note : $\boxed{l = \lim\limits_{n \to +\infty} U_n}$

Par passage à la limite $0 = \dfrac{l - 2}{l + 1}$

donc $l - 2 = 0$

et donc $l = 2$

donc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 2}$

5) seul $(2{,}001)$ renvoie la valeur $\boxed{14}$

(la boucle s'arrête dès que $U \leq 2{,}001$)

14 est le plus petit entier n tel que $U_n \leq 2{,}001$