ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Mathématiques

Bac Blanc 2026

Sujet 1

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège », est autorisé.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.
Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses seront valorisées.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

Le sujet est composé de 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5 et comporte 4 exercices.

Exercice 1 **4 points**

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée.

Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère un réel a et les points

$$\text{A}(0\ ;\ 4\ ;\ -1), \quad \text{B}(6\ ;\ 1\ ;\ 5) \quad \text{et} \quad \text{C}(a\ ;\ -2\ ;\ -1).$$

Affirmation 1 : Pour toutes les valeurs de a, les points A, B et C ne sont pas alignés.

Affirmation 2 : Une représentation paramétrique de la droite (AB) est

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 2+2t\\ y &=& 3-t\\ z &=& 1+2t \end{array}\right. \quad \text{où } t \in \mathbb{R}.$$

On considère les droites (d_1) et (d_2) dont on donne ci-dessous une représentation paramétrique :

$$(d_1) : \left\{\begin{array}{lcl} x &=& 3+t\\ y &=& 1+t\\ z &=& 2+t \end{array}\right. \quad \text{où } t \in \mathbb{R} \qquad ; \qquad (d_2) : \left\{\begin{array}{lcl} x &=& 2k\\ y &=& 4-k\\ z &=& -1-2k \end{array}\right. \quad \text{où } k \in \mathbb{R}.$$

Affirmation 3 : Il existe exactement une valeur de a telle que les droites (BC) et (d_2) soient parallèles.

Affirmation 4 : (d_1) et (d_2) sont sécantes.

Exercice 2 **5 points**

« Le virus du chikungunya, transmis à l'homme par la piqûre du moustique tigre provoque chez les patients des douleurs articulaires aiguës qui peuvent être persistantes. En 2005, une importante épidémie de chikungunya a touché les îles de l'Océan Indien et notamment l'île de La Réunion, avec plusieurs centaines de milliers de cas déclarés. En 2007, la maladie a fait son apparition en Europe, puis fin 2013, aux Antilles et a atteint le continent américain en 2014 ».

Un test a été mis au point pour le dépistage de ce virus.

Le laboratoire fabriquant ce test fournit les caractéristiques suivantes :

— la probabilité qu'un individu atteint par le virus ait un test positif est de $0,999$;

— la probabilité qu'un individu non atteint par le virus ait un test positif est de $0,005$.

On procède à un test de dépistage systématique dans une population cible.

Un individu est choisi au hasard dans cette population. On appelle :

— M l'évènement : « l'individu choisi est atteint du chikungunya ».

— T l'évènement : « le test de l'individu choisi est positif ».

On considère que le test est *fiable* lorsque la probabilité qu'un individu ayant un test positif soit atteint par le virus est supérieure à $0,95$.

Toutes les probabilités, sauf indication contraire, seront arrondies à 10^{-3} dans cet exercice.

Partie A : Étude d'un exemple

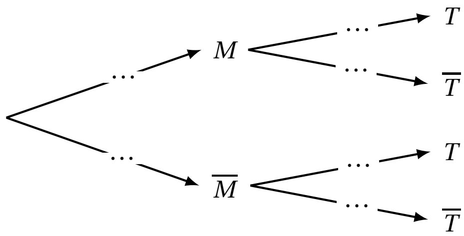
1. Donner les probabilités $P_M(T)$ et $P_{\overline{M}}(T)$.

   « En mars 2005, l'épidémie s'est propagée rapidement dans l'ile de La Réunion, avec une flambée importante entre fin avril et début juin puis une persistance de la transmission virale durant l'hiver austral. Au total, 270 000 personnes ont été infectées pour une population totale de 750 000 individus ».

   Fin 2005, le laboratoire a effectué un test de dépistage massif de la population de l'île de La Réunion.

   Dans cette partie, la population cible est donc la population de l'ile de La Réunion.

2. Justifier que $P(M) = 0,36$.
3. Recopier et compléter l'arbre pondéré donné ci-dessous.



4. Calculer la probabilité qu'un individu soit atteint par le virus et ait un test positif.
5. Calculer la probabilité qu'un individu ait un test positif.
6. Calculer la probabilité qu'un individu ayant un test positif soit atteint par le virus.
7. Peut-on estimer que ce test est fiable ? Argumenter.

Partie B : Dépistage sur une population cible

Dans cette partie, on note p la proportion de personnes atteintes par le virus du chikungunya dans une population cible.

On cherche ici à tester la fiabilité du test de ce laboratoire en fonction de p.

1. Recopier, en l'adaptant, l'arbre pondéré de la question A3 en tenant compte des nouvelles données.
2. Exprimer la probabilité $P(T)$ en fonction de p.
3. Montrer que $P_T(M) = \dfrac{999p}{994p+5}$.
4. Pour quelles valeurs de p peut-on considérer que ce test est fiable ?

Partie C : Étude sur un échantillon

Pendant l'épidémie, on admet que la probabilité d'être atteint du chikungunya sur l'ile de La Réunion est de $0,36$.

On considère un échantillon de 10 individus choisis au hasard, en assimilant ce choix à un tirage au sort avec remise.

On désigne par X la variable aléatoire dénombrant le nombre d'individus infectés dans cet échantillon parmi les 10 tirés au sort.

On admet que X suit une loi binomiale de paramètres 10 et $p = 0,36$.

1. Déterminer la probabilité qu'il y ait 5 individus infectés dans cet échantillon.

   Vous donnerez une expression exacte et une valeur arrondie au millième.

2. Déterminer la probabilité qu'il y ait au moins un individu infecté dans cet échantillon.

   Vous donnerez une expression exacte et une valeur arrondie au millième.

Exercice 3 — **6 points**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\mathrm{e}^{-x} + 2x - 1$

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

On appelle $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

On note f' la fonction dérivée de la fonction f et f'' la fonction dérivée seconde de f.

Partie A : Étude de la fonction f

1. Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. **a.** Pour tout réel x, calculer $f'(x)$.

   b. Montrer que pour tout réel x : $f''(x) = (x-2)\mathrm{e}^{-x}$

   c. Étudier la convexité de la fonction f.

   d. Étudier les variations de la fonction f' sur $\mathbb{R}$, puis dresser son tableau de variations en y faisant apparaître la valeur exacte de l'extremum. Les limites de la fonction f' aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues.

   e. En déduire le signe de la fonction f' sur $\mathbb{R}$, puis justifier que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
3. **a.** Justifier qu'il existe un unique réel α tel que $f(\alpha) = 0$.

   b. Donner un encadrement de α, au centième près.

Partie B : Recherche d'une tangente particulière

L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifier votre réponse.

Rappel : les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses seront valorisées.

Affirmation : Il existe un point de la courbe $\mathscr{C}_f$ en lequel la tangente a pour coefficient directeur 2 et passe par le point B de coordonnées $\left(0\,;\,\dfrac{1-\mathrm{e}}{\mathrm{e}}\right)$.

Exercice 4 **5 points**

On considère la suite (U_n) définie par $U_0 = 8$ et, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = \dfrac{6U_n + 2}{U_n + 5}$.

1. Calculer U_1.

2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{6x+2}{x+5}$.

Ainsi, pour tout entier naturel n, on a : $U_{n+1} = f(U_n)$.

a. On admet que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

En déduire que pour tout réel $x > 2$, on a $f(x) > 2$.

b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $U_n > 2$.

3. On admet que, pour tout entier naturel n, on a : $U_{n+1} - U_n = \dfrac{(2-U_n)(U_n+1)}{U_n+5}$.

Démontrer que la suite (U_n) est convergente.

4. On définit la suite (V_n) pour tout entier naturel par : $V_n = \dfrac{U_n - 2}{U_n + 1}$.

a. Calculer V_0.

b. Démontrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{4}{7}$.

c. Déterminer, en justifiant, la limite de (V_n).

d. En déduire la limite de (U_n).

5. On considère la fonction Python seuil ci-contre, où A est un nombre réel strictement plus grand que 2.

Donner, sans justification, la valeur renvoyée par la commande seuil (2.001) puis interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

```
def seuil (A) :
    n = 0
    u = 8
    while u > A :
        u = (6*u + 2)/(u + 5)
        n = n + 1
    return n
```