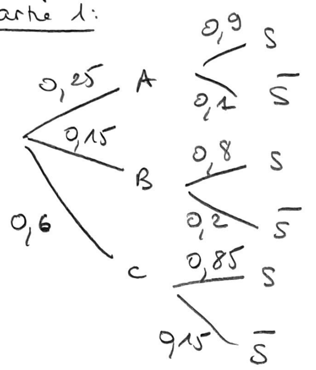
Sujet 2

Ex 1 Partie 1 :

1)



2) $P(B \cap S) = P(B) \times P_B(S) = 0,15 \times 0,8 = \boxed{0,12}$

3) $P(C \cap \bar{S}) = P(C) \times P_C(\bar{S}) = 0,6 \times 0,15 = \boxed{0,09}$

La probabilité que la connexion soit instable et passe par C est égale à 0,09.

4) $P(S) = P(A \cap S) + P(B \cap S) + P(C \cap S)$
d'après la formule des probabilités totales.
donc $P(S) = 0,25 \times 0,9 + 0,15 \times 0,8 + 0,6 \times 0,85$
$\boxed{P(S) = 0,855}$

5) $P_S(B) = \dfrac{P(B \cap S)}{P(S)} = \dfrac{0,12}{0,855} \simeq \boxed{0,140}$

(1).

Partie 2

1 a) • Epreuve de Bernoulli : On s'intéresse à une connexion
• Succès : la connexion est instable
• Probabilité du succès : 0,145

• On considère 50 épreuves identiques et indépendantes
• X est la variable aléatoire égale au nombre de succès.
• X suit la loi $\mathcal{B}(50 ; 0,145)$

b) $P(X = 6) = \binom{50}{6} \times 0,145^6 \times 0,855^{24} \simeq \boxed{0,150}$

c) 15% des connexions : $50 \times 0,15 = 7,5$.
Au moins 15 % des connexions donc au moins 8
$\boxed{P(X \geqslant 8) \simeq 0,441}$

d) En moyenne le nombre de connexions instables est :
$E(X) = np = 50 \times 0,145 = 7,25$
donc en proportion : $\dfrac{7,25}{50} = 0,145 = 14,5\%$
donc en moyenne 14,5% des 50 connexions sont instables.

2) X suit la loi $\mathcal{B}(n ; 0,145)$

a) $p_n = P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = \boxed{1 - 0,855^n}$

b) Algo (0,99)
La boucle s'arrête dès que $1 - 0,855^n \geqslant 0,99$
La valeur retournée est $\boxed{n = 30}$
A partir de 30 connexions, la probabilité qu'une connexion soit instable est supérieure ou égale à 0,99

(2

Ex2

Partie 1 Sur $[2;+\infty[$ $f(x)=\sqrt{3x-2}$

$U_0 = 6$ $\forall n\in\mathbb{N}$ $U_{n+1}=f(U_n)$

1) $\forall x \geqslant 2$ $f'(x)=\dfrac{3}{2\sqrt{3x-2}}$

$f'(x)>0$ donc f est croissante sur $[2,+\infty[$

2) a) $\forall n\in\mathbb{N}$ $\mathcal{P}(n)$: $2\leq U_{n+1}\leq U_n\leq 6$.

① Pour $n=0$

$U_{n+1}=U_1=f(U_0)=f(6)=\sqrt{16}=4$

$U_n=U_0=6$

donc $2\leq 4\leq 6\leq 6$

donc $\mathcal{P}(n)$ vrai pour $n=0$

② Soit $n\geqslant 0$ on va démontrer que si $\mathcal{P}(n)$ est vrai alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vrai donc on va démontrer que si $2\leq U_{n+1}\leq U_n\leq 6$ alors $2\leq U_{n+2}\leq U_{n+1}\leq 6$.

Si $2\leq U_{n+1}\leq U_n\leq 6$

alors $f(2)\leq f(U_{n+1})\leq f(U_n)\leq f(6)$ car f croissante sur $[2,+\infty[$

donc $\sqrt{4}\leq U_{n+2}\leq U_{n+1}\leq\sqrt{16}$

donc $2\leq U_{n+2}\leq U_{n+1}\leq 4$ or $4\leq 6$

donc $2\leq U_{n+2}\leq U_{n+1}\leq 6$ CQFD

③ D'après le principe de raisonnement par récurrence pour tout $n\geqslant 0$ $2\leq U_{n+1}\leq U_n\leq 6$.

b) $\forall n\in\mathbb{N}$ $U_{n+1}\leq U_n$ donc (U_n) est décroissante

$\forall n\in\mathbb{N}$ $2\leq U_n$ donc (U_n) est minorée par 2

(U_n) est décroissante et minorée donc elle converge.

c) On note $l=\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$ On a : $\boxed{2\leq l\leq 6}$

On a $U_{n+1}=f(U_n)$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}U_{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}f(U_n)$

donc $l=\lim\limits_{x\to l}f(x)$ donc $l=f(l)$

car f est continue sur $[2,+\infty[$ car dérivable

$l=f(l)$

$\Leftrightarrow l=\sqrt{3l-2}$

$\Leftrightarrow l^2=3l-2$

$\Leftrightarrow l^2-3l+2=0$

$\Leftrightarrow l=2$ ou $l=1$

$\Delta=9-8=1$

$l_1=\dfrac{3+1}{2}=2$

$l_2=\dfrac{3-1}{2}=1$

On sait que $l\geqslant 2$

donc $l=1$ est impossible donc $\boxed{l=2}$

donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=2}$

Partie 2 $V_0=6$ $\forall n\in\mathbb{N}$ $V_{n+1}=3-\dfrac{2}{V_n}$

1) $V_1=3-\dfrac{2}{V_0}=3-\dfrac{2}{6}=3-\dfrac{1}{3}=\boxed{\dfrac{8}{3}}$

2) $\forall n\in\mathbb{N}$ $W_n=\dfrac{V_n-1}{V_n-2}$

a) $W_{n+1}=\dfrac{V_{n+1}-1}{V_{n+1}-2}=\dfrac{3-\frac{2}{V_n}-1}{3-\frac{2}{V_n}-2}=\dfrac{2-\frac{2}{V_n}}{1-\frac{2}{V_n}}$

$W_{n+1}=\dfrac{\frac{2V_n-2}{V_n}}{\frac{V_n-2}{V_n}}=\dfrac{2V_n-2}{V_n-2}=\dfrac{2(V_n-1)}{V_n-2}$

$\boxed{W_{n+1}=2W_n}$ et $W_0=\dfrac{V_0-1}{V_0-2}=\dfrac{5}{4}$

donc (W_n) est géométrique de raison 2, de premier terme $W_0=\dfrac{5}{4}$

b) $\forall n\in\mathbb{N}$ $1+\dfrac{1}{V_n-2}=\dfrac{V_n-2+1}{V_n-2}=\dfrac{V_n-1}{V_n-2}=W_n$.

donc $\boxed{W_n=1+\dfrac{1}{V_n-2}}$

$\forall n \in \mathbb{N}$ $W_n = W_0 \times q^n$

$W_n = \frac{5}{4} \times 2^n$ donc $\boxed{W_n = 1{,}25 \times 2^n}$

$\forall n \in \mathbb{N}$ $W_n = 1 + \frac{1}{V_n - 2}$

$\Leftrightarrow W_n - 1 = \frac{1}{V_n - 2}$

$\Leftrightarrow V_n - 2 = \frac{1}{W_n - 1}$

$\Leftrightarrow V_n = \frac{1}{W_n - 1} + 2$

donc $\boxed{V_n = \frac{1}{1{,}25 \times 2^n - 1} + 2}$

c) $2 > 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} 1{,}25 \times 2^n - 1 = +\infty$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{1{,}25 \times 2^n - 1} = 0$

et donc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = 2}$

3) le plus petit entier n tel que U_n et V_n sont dans $[1{,}99 ; 2{,}01]$ est $\boxed{17}$

$\boxed{\text{Ex 3}}$ $A(1, -2, -1)$ $B(0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$

$\overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB}$

$(d) : \begin{cases} x = 2 - k \\ y = 1 + k \\ z = k \end{cases}$ $k \in \mathbb{R}$.

Affirmation 1 :

Soit la droite (d_1) de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - 3t \\ z = -1 - t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$

① $A \in (d_1)$?

Peut-on trouver t tel que $\begin{cases} 1 + 2t = 1 \\ -2 - 3t = -2 \\ -1 - t = -1 \end{cases}$?

donc tel que $\begin{cases} 2t = 0 \\ -3t = 0 \\ -t = 0 \end{cases}$ donc pour $t = 0$, on a le point A donc $A \in (d_1)$

② $B \in (d_1)$?

Peut-on trouver t tel que $\begin{cases} 1 + 2t = 0 \\ -2 - 3t = -\frac{1}{2} \\ -1 - t = -\frac{1}{2} \end{cases}$? noté S

$S \Leftrightarrow \begin{cases} 2t = -1 \\ -3t = -\frac{1}{2} + 2 \\ -t = -\frac{1}{2} + 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{1}{2} \\ -3t = \frac{3}{2} \\ -t = +\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{1}{2} \\ t = -\frac{1}{2} \\ t = -\frac{1}{2} \end{cases}$

Donc pour $t = -\frac{1}{2}$, on a le point B donc $B \in (d_1)$

donc (d_1) est la droite (AB) donc l'affirmation 1 est vraie

Affirmation 2.

A, B, C sont alignés $\iff \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\ -\frac{1}{2}+2\\ -\frac{1}{2}+1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\ \frac{3}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$

On a $\overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB}$ avec $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}$ donc $\boxed{3\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}3\\-6\\-3\end{pmatrix}}$

avec $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ donc $\boxed{-2\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}}$

donc $\overrightarrow{OC}\begin{pmatrix}3\\-5\\-2\end{pmatrix}$ donc $\boxed{C(3;-5;-2)}$

et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3-1\\-5+2\\-2+1\end{pmatrix}$ donc $\boxed{\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\-3\\-1\end{pmatrix}}$

On a $\overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{AB}$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires donc les points A, B, C sont alignés

<u>L'affirmation 2 est vraie</u>

Affirmation 3

(d) et (AB) sont-elles parallèles ?

(d) a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$

(AB) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\ \frac{3}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$

$\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas colinéaires

donc (d) et (AB) ne sont pas parallèles.

Pour savoir si (d) et (AB) sont coplanaires, il faut donc regarder si elles ont un point commun.

<u>Peut-on trouver k et t tels que</u>

$$\begin{cases} 2-k = 1+2t \\ 1+k = -2-3t \\ k = -1-t \end{cases} \; ?$$

$$\iff \begin{cases} -k-2t = -1 \\ k+3t = -3 \\ k+t = -1 \end{cases} \underset{\substack{L_2+L_1 \\ L_3+L_1}}{\iff} \begin{cases} -k-2t = -1 \\ t = -4 \\ t = -2 \end{cases}$$

On obtient deux valeurs différentes de t, donc le système n'a pas de solution donc (d) et (AB) ne sont pas sécantes.

(d) et (AB) n'étant ni sécantes, ni parallèles, elles ne sont donc pas coplanaires donc <u>l'affirmation 3 est fausse</u>

Affirmation 4.

Soit le point de (Δ) d'abscisse -1.

(Δ) a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = -1+3t \\ y = 4+2t \\ z = 3 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

Si $x = -1$ alors $-1+3t = -1$

donc $3t = 0$

donc $t = 0$

On a pour $t = 0$ $\begin{cases} x = -1 \\ y = 4 \\ z = 3 \end{cases}$ donc le point de (Δ) qui a pour abscisse -1 est $K(-1;4;3)$

<u>Ce point K appartient-il à (d) ?</u>

Pour $x = -1$ on a $2-k = -1$

donc $k = 3$

Or pour $k = 3$ on a le point de (d) de coordonnées :

$x = 2-k = -1$

$y = 1+k = 4$

$z = 3$

On retrouve les coordonnées de K donc

$K \in (d)$

et donc K est le point d'intersection de (d) et (Δ) et il a pour abscisse -1

Donc <u>l'affirmation 4 est vraie</u>

<u>Rmq:</u> On aurait pu aussi résoudre $\begin{cases} -1+3t = 2-k \\ 4+2t = 1+k \\ 3 = k \end{cases}$

pour déterminer l'existence d'un point d'intersection et vérifier si ce point avait pour abscisse -1

Ex4 Partie 1

1a) Quand la dérivée s'annule la courbe de la fonction a une tangente horizontale.

On note f_1 la fonction représentée par $\mathcal{C}_1$

f_2 " " " $\mathcal{C}_2$

f_2 s'annule en 1 et $\mathcal{C}_1$ a une tangente horizontale en $x = 1$

f_1 s'annule en $x \simeq 0,3$ et $\mathcal{C}_2$ n'a pas de tangente horizontale en $x \simeq 0,3$

donc $f_2 = g'$ et $f_1 = g$

donc $\mathcal{C}_1$ est la courbe de g.

b) Conjectures: $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

1 point d'inflexion pour g.

2 a) $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad f_0(x) = (x^2+3x)e^{-x}$

(E) : $y + y' = (2x+3)e^{-x}$

$f_0'(x) = (2x+3)e^{-x} + (x^2+3x) \times e^{-x} \times (-1)$

$f_0'(x) = e^{-x}(2x+3 - x^2 - 3x)$

$f_0'(x) = e^{-x}(-x^2 - x + 3)$

On a $f_0(x) + f_0'(x) = e^{-x}(\cancel{x^2} + 3x - \cancel{x^2} - x + 3)$

$= e^{-x}(2x+3)$

donc f_0 est solution de (E)

b) (E_0) : $y + y' = 0$

$y + y' = 0 \Leftrightarrow y' = -y$

Les solutions sont les fonctions de la forme $y(x) = Ce^{-x}$ avec $C \in \mathbb{R}$

c) Les solutions de (E) sont les fonctions de la forme $y(x) = Ce^{-x} + f_0(x)$

$$\boxed{y(x) = Ce^{-x} + (x^2+3x)e^{-x}}$$

d) g est solution de (E) donc il existe une constante C telle que $g(x) = Ce^{-x} + (x^2+3x)e^{-x}$

On a $g(0) = 1$

donc $Ce^0 + 0 = 1$ donc $C = 1$

donc $g(x) = e^{-x} + (x^2+3x)e^{-x}$

$$\boxed{g(x) = e^{-x}(x^2+3x+1)}$$

Partie 2 $\quad a \in \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad u(x) = (x^2+3x+a)e^{-x}$.

$u''(x) = (x^2 - x - 4 + a)e^{-x}$

1) $g'(x) = -e^{-x}(x^2+3x+1) + e^{-x}(2x+3)$

$g'(x) = (-x^2 - 3x - 1 + 2x + 3)e^{-x}$

$g'(x) = (-x^2 - x + 2)e^{-x}$

2) Conjecture 1 : $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = \lim\limits_{X \to -\infty} e^{X} = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 + 3x + 1 = +\infty$

FI

On a $g(x) = \dfrac{x^2+3x+1}{e^x} = \dfrac{x^2}{e^x} + \dfrac{3x}{e^x} + \dfrac{1}{e^x}$

On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{e^x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$

et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$

donc $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0}$ Conjecture confirmée.

Conjecture 2 Variations de g.

$\forall x \in \mathbb{R}$ $g'(x) = (-x^2 - x + 2)e^{-x}$

$\forall x \in \mathbb{R}$ $e^{-x} > 0$ donc $g'(x)$ est du signe de $-x^2 - x + 2$

$\Delta = 1 + 8 = 9$

$x_1 = \dfrac{1+3}{-2} = -2$ $x_2 = \dfrac{1-3}{-2} = 1$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

La conjecture était fausse.

Conjecture 3 1 point d'inflexion :

On étudie le signe de $g''(x)$

On remarque que $g(x) = u(x)$ avec $a = 1$

donc $g''(x) = u''(x) = (x^2 - x - 4 + 1)e^{-x}$

$$\boxed{g''(x) = (x^2 - x - 3)e^{-x}}$$

$g''(x)$ est du signe de $x^2 - x - 3$.

$\Delta = 1 + 12 = 13$

$x_1 = \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$ $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$

x	$-\infty$		x_2		x_1		$+\infty$
$g''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

g'' s'annule deux fois en changeant de signe donc $\mathcal{C}_g$ a deux points d'inflexion. donc la conjecture était fausse.

3) Solutions de (E) $y(x) = Ce^{-x} + (x^2 + 3x)e^{-x}$

$y(x) = \underbrace{e^{-x}(x^2 + 3x + C)}_{u(x)}$ avec $a = C$

donc $y''(x) = (x^2 - x - 4 + C)e^{-x}$

$y''(x)$ est du signe de $x^2 - x - 4 + C$ car $\forall x \in \mathbb{R}$ $e^{-x} > 0$

Pour qu'il y ait un seul point d'inflexion il faudrait que ce trinôme du second degré s'annule une seule fois en changeant de signe ce qui n'est pas possible donc, non, il n'existe pas de solution dont la courbe ait un seul point d'inflexion.