ÉPREUVE D’ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Mathématiques

Mars 2026

Sujet 2

Durée de l’épreuve : **4 heures**

L’usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L’usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège », est autorisé.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l’appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses seront valorisées.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

Ce sujet est composé de 6 pages et comporte 4 exercices.

<u>RENDRE LE SUJET AVEC LA COPIE A LA FIN DE L'EPREUVE</u>

Exercice 1 5 points

Pour accéder au réseau privé d'une entreprise depuis l'extérieur, les connexions des employés transitent aléatoirement via trois serveurs distants différents, notés A, B et C. Ces serveurs ont des caractéristiques techniques différentes et les connexions se répartissent de la manière suivante :

— 25 % des connexions transitent via le serveur A.
— 15 % des connexions transitent via le serveur B.
— le reste des connexions s'effectue via le serveur C.

Les connexions à distance sont parfois instables et, lors du fonctionnement normal des serveurs, les utilisateurs peuvent subir des déconnexions pour différentes raisons (saturation des serveurs, débit internet insuffisant, attaques malveillantes, mises à jour de logiciels, etc.).
On dira qu'une connexion est stable si l'utilisateur ne subit pas de déconnexion après son identification aux serveurs. L'équipe de maintenance informatique a observé statistiquement que, dans le cadre d'un fonctionnement habituel des serveurs :

— 90 % des connexions via le serveur A sont stables;
— 80 % des connexions via le serveur B sont stables;
— 85 % des connexions via le serveur C sont stables.

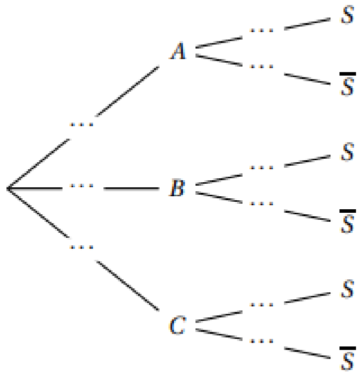
Les parties 1 et 2 sont indépendantes l'une de l'autre et peuvent être traitées séparément.

Partie 1

On s'intéresse, au hasard à l'état d'une connexion effectuée par un employé de l'entreprise.
On considère les évènements suivants :

— A : « La connexion s'est effectuée via le serveur A »;
— B : « La connexion s'est effectuée via le serveur B »;
— C : « La connexion s'est effectuée via le serveur C »;
— S : « La connexion est stable ».

On note $\overline{S}$ l'évènement contraire de l'évènement S.



1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-contre modélisant la situation de l'énoncé.

2. Démontrer que la probabilité que la connexion soit stable et passe par le serveur B est égale à 0,12.

3. Calculer la probabilité $P(C \cap \overline{S})$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

4. Démontrer que la probabilité de l'évènement S est P(S) = 0,855.

5. On suppose désormais que la connexion est stable.
Calculer la probabilité que la connexion ait eu lieu depuis le serveur B.
On donnera la valeur arrondie au millième.

Partie 2

D'après la partie 1, la probabilité qu'une connexion soit instable est égale à 0,145.

1. Dans le but de détecter les dysfonctionnements de serveurs, on étudie un échantillon de 50 connexions au réseau, ces connexions étant choisies au hasard. On suppose que le nombre de connexions est suffisamment important pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise.
On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de connexions instables au réseau de l'entreprise, dans cet échantillon de 50 connexions.

a. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.

b. Quelle est la probabilité que 6 connexions soient instables ? On donnera une expression exacte de cette probabilité et la valeur arrondie au millième.

c. Quelle est la probabilité, arrondie au millième, que parmi les 50 connexions au moins 15 % soient instables ?

2. Dans cette question, on constitue désormais un échantillon de n connexions, toujours dans les mêmes conditions, où n désigne un entier naturel strictement positif.
On admettra que la variable aléatoire dénombrant le nombre de connexions défectueuses dans l'échantillon suit une loi binomiale de paramètres n et 0,145.

a. Donner l'expression en fonction de n de la probabilité p_n qu'au moins une connexion de cet échantillon soit instable. Justifier.

b. On considère la fonction Algo ci-contre :

Sans justification, donner la valeur renvoyée par Algo(0,99).

Interpréter cette valeur dans le contexte de l'énoncé.

```
def Algo(p) :
  n=1
  while 1 – 0.855**n < p :
    n = n+1
  return n
```

Exercice 2 — 5 points

Les parties 1 et 2 de cet exercice sont largement indépendantes.

Partie 1

Soit f la fonction définie sur $[2\,;+\infty[$ par : $f(x)=\sqrt{3x-2}$

On considère alors la suite (u_n) définie par : $u_0=6$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=f(u_n)$.

1. Justifier que f est croissante sur $[2\,;+\infty[$.

2. a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n : $2\leq u_{n+1}\leq u_n\leq 6$.

b. En déduire que la suite (u_n) converge.

c. On appelle ℓ la limite de (u_n).

Montrer que $\ell^2=3\ell-2$ puis déterminer la valeur de ℓ.

Partie 2 On considère maintenant la suite (v_n) vérifiant $v_0 = 6$ et, pour tout entier naturel n,

$$v_{n+1} = 3 - \frac{2}{v_n}$$

1. Calculer v_1.

2. Pour tout n entier naturel, on pose : $w_n = \dfrac{v_n - 1}{v_n - 2}$

a. Démontrer que la suite (w_n) est géométrique de raison 2 et préciser son premier terme w_0.

b. Justifier que, pour tout entier naturel n, $w_n = 1 + \dfrac{1}{v_n - 2}$.

En déduire que, pour tout n entier naturel, $v_n = 2 + \dfrac{1}{1,25 \times 2^n - 1}$

c. Calculer la limite de (v_n).

3. (u_n) étant la suite définie dans la partie 1, donner, sans justifier, le plus petit entier naturel N tel pour tout $n \geq N$, les termes u_n et v_n appartiennent à l'intervalle [1,99 ; 2,01].

Exercice 3 — 4 points

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.
Les quatre affirmations peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

L'espace est muni d'un repère d'origine O .
On considère les points A (1 ; –2 ; –1), B(0 ; $-\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}$) et C tel que $\overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OA} - 2\,\overrightarrow{OB}$

Soit (d) la droite ayant pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 2 - k \\ y = 1 + k \\ z = k \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Affirmation 1 : Une représentation paramétrique de la droite (AB) est : $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - 3t \\ z = -1 - t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

Affirmation 2 : Les points A, B et C sont alignés.

Affirmation 3 : Les droites (d) et (AB) sont coplanaires.

On considère maintenant la droite (Δ) de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 4 + 2t \\ z = 3 \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$, et on admet que (Δ) et (d) sont coplanaires.

Affirmation 4 : Les droites (Δ) et (d) sont sécantes et leur point d'intersection a pour abscisse –1.

Exercice 4 — 6 points

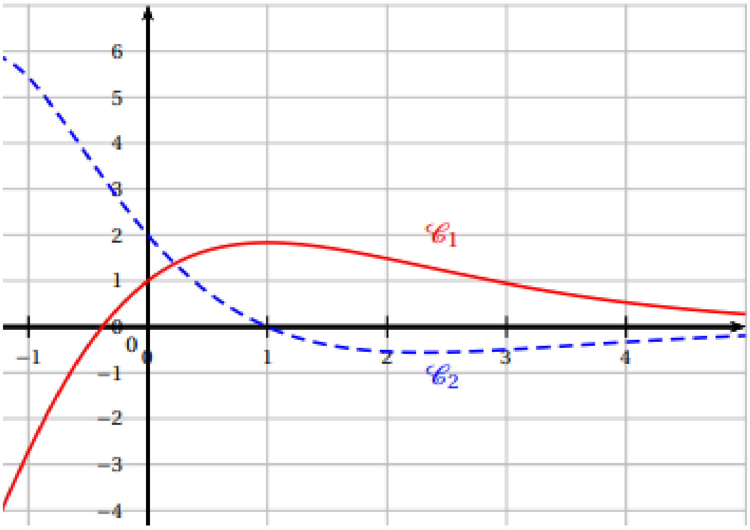
PARTIE 1

On donne ci-dessous, dans un repère orthogonal, les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$, représentations graphiques de deux fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.

L'une des deux fonctions est la dérivée de l'autre. On les notera g et g'.

On précise également que :

- La courbe $\mathscr{C}_1$ coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées (0 ; 1)
- La courbe $\mathscr{C}_2$ coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées (0 ; 2).



1. Justifier que g est représentée par $\mathscr{C}_1$.

2. Avec la précision permise par le graphique conjecturer :

- Le tableau de variations de la fonction g .
- La limite de g en $+\infty$.
- Le nombre de points d'inflexion de la courbe de la fonction g.

PARTIE 2

On considère (E) l'équation différentielle :

$$y + y' = (2x + 3)\, e^{-x}, \text{ où } y \text{ est une fonction de la variable réelle } x.$$

1. Montrer que la fonction f_0 définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f_0(x) = (x^2 + 3x)e^{-x}$ est solution de (E).

2. Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $y + y' = 0$.

3. Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E).

4. On admet que la fonction g décrite dans la partie 1 est solution de (E).

Déterminer l'expression de la fonction g.

PARTIE 3

Dans cette partie on pourra utiliser sans le démontrer le résultat suivant :

> Une fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = (x^2 +3x +a) e^{-x}$, a étant un nombre réel, est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x :
>
> $$u''(x) = (x^2 - x - 4+ a)e^{-x}, \ u'' \text{ désignant la fonction dérivée seconde de } u.$$

On admet maintenant que pour tout nombre réel x :

$$g\,(x) = (x^2 +3x + 1)\, e^{-x}, \ g \text{ étant la fonction décrite dans la partie 1.}$$

1. Vérifier que, pour tout nombre réel x, $g'\,(x) = (-x^2 - x + 2\,)e^{-x}$, g' étant la fonction dérivée de g.

2. Confirmer ou infirmer, en justifiant, les conjectures émises à la question 2 de la partie 1.

3. On rappelle que (E) désigne l'équation différentielle donnée dans la partie 2.

Existe-t-il une solution de l'équation différentielle (E) dont la courbe admet un seul point d'inflexion ? Justifier.