Ex1

$A(2,-1,0)$ $B(3,-1,2)$ $C(0,4,1)$ $S(0,1,4)$

1) $\vec{AB}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ $\vec{AC}\begin{pmatrix}-2\\5\\1\end{pmatrix}$

$\frac{x}{x'} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$ $\frac{y}{y'} = \frac{0}{5} = 0$

$\frac{x}{x'} \neq \frac{y}{y'}$ donc les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires donc les points A, B, C ne sont pas alignés donc ils définissent un plan.

2 a) $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$

$\vec{n}\cdot\vec{AB} = 2+0-2=0$ donc $\vec{n}\perp\vec{AB}$

$\vec{n}\cdot\vec{AC} = -4+5-1=0$ donc $\vec{n}\perp\vec{AC}$

$\vec{n}\perp\vec{AB}$ et $\vec{n}\perp\vec{AC}$ donc $\vec{n}$ est normal au plan (ABC)

b) $\vec{n}$ est normal au plan (ABC) donc (ABC) a une équation de la forme $2x+y-z+d=0$

$A\in(ABC)$ donc $2x_A+y_A-z_A+d=0$

$\Leftrightarrow 4-1+d=0$

$\Leftrightarrow d=-3$

(ABC) a pour équation $\boxed{2x+y-z-3=0}$

c) A, B, C, S sont coplanaires $\Leftrightarrow$ S appartient à (ABC)

On a $2x_S+y_S-z_S-3$
$= 2\times0+1-4 = 1-4=-3\neq0$ donc $S\notin(ABC)$

donc A, B, C, S ne sont pas coplanaires

3) (ABC) a pour vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$
(d) est orthogonale au plan (ABC) donc (d) a pour vecteur directeur $\vec{n}$
$S\in(d)$ donc (d) a pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x=2k \\ y=1+k \\ z=4-k \end{cases} \quad k\in\mathbb{R}$$

Un tétraèdre est une pyramide à base triangulaire.

b) H est le pied de la hauteur issue du sommet S donc $[SH]$ est une hauteur du tétraèdre

H est appelé projeté orthog du point S sur le plan (ABC)

Coordonnées de H.

$H\in(ABC)$ donc $2x_H+y_H-z_H-3=0$.

$H\in(d)$ donc il existe k réel tel que

$$\begin{cases} x_H=2k \\ y_H=1+k \\ z_H=4-k \end{cases}$$

On a donc

$2(2k)+1+k-4+k-3=0$

$\Leftrightarrow 4k+2k-6=0$

$\Leftrightarrow 6k=6$

$\Leftrightarrow \boxed{k=1}$

donc $x_H = 2k = 2$

$y_H = 1+k = 2$

$z_H = 4-k = 3$

$\boxed{H(2,2,3)}$

4) a) $\vec{AB}\cdot\vec{AC} = 1\times(-2)+0\times5+2\times1 = -2+2=0$.

donc $(AB)\perp(AC)$

et donc le triangle ABC est rectangle en A

b) $V = \frac{\text{Aire}(ABC)\times SH}{3}$

avec | ABC tr. rect en A donc $\text{Aire}(ABC) = \frac{AB\times AC}{2}$

$AB = \|\vec{AB}\| = \sqrt{1+0+4} = \sqrt5$

$AC = \|\vec{AC}\| = \sqrt{4+25+1} = \sqrt{30}$

donc $\text{Aire}(ABC) = \frac{\sqrt5\times\sqrt{30}}{2}$

$= \frac{\sqrt5\times\sqrt5\times\sqrt6}{2}$

$\boxed{\text{Aire}(ABC) = \frac{5\sqrt6}{2}}$

$V = \frac{1}{3}\times\text{Aire}(ABC)\times SH$.

$V = \frac{1}{3}\times\frac{5\sqrt6}{2}\times\sqrt6$

$V = \frac{5\times6}{6}$

$\boxed{V=5}$ unités de volume

5 a) $\vec{SA}\begin{pmatrix}2\\-2\\-4\end{pmatrix}$ $SA = \|\vec{SA}\| = \sqrt{4+4+16} =$

$SA = \sqrt{24} = 2\sqrt6$

$\boxed{SA = 2\sqrt6}$

$\vec{SB}\begin{pmatrix}3\\-2\\-2\end{pmatrix}$

b) $SB = \sqrt{17}$

On a $\vec{SA}\cdot\vec{SB} = SA\times SB\times\cos(\widehat{ASB})$

donc $\cos(\widehat{ASB}) = \frac{\vec{SA}\cdot\vec{SB}}{SA\times SB} = \frac{6+4+8}{2\sqrt6\times\sqrt{17}} = \frac{9}{\sqrt6\times\sqrt{17}}$

$\boxed{\widehat{ASB}\simeq 27°}$

Ex 2

Pour (d_1) : $A(1, 2, -1)$ et $\vec{u_1}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$

Pour (d_2) : $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1+t \\ z = 2+t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$

1) Représentation paramétrique de (d_1) :

$$\begin{cases} x = 1+k \\ y = 2+2k \\ z = -1 \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}$$

2) ① Montrons que (d_1) et (d_2) ne sont pas parallèles

(d_1) a pour vecteur directeur $\vec{u_1}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$

(d_2) ———————— $\vec{u_2}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

$\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ ne sont pas colinéaires

donc (d_1) et (d_2) ne sont pas parallèles.

② Montrons que (d_1) et (d_2) ne sont pas sécantes.

Pour cela, montrons qu'elles n'ont pas de point commun.

Pour cela, montrons qu'il n'existe pas de réels k et t

tels que $\begin{cases} 0 = 1+k \\ 1+t = 2+2k \\ 2+t = -1 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} k = -1 \\ 1+t = 2-2 \\ 2+t = -1 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} k = -1 \\ t = -1 \\ t = -3 \end{cases}$ ← 2 valeurs différentes de t donc k et t n'existent pas.

③ (d_1) et (d_2) ne sont ni parallèles, ni sécantes

donc (d_1) et (d_2) ne sont pas coplanaires.

Ex 2

$\mathcal{P}$ passe par $A(1, 2, -1)$ et a pour vecteurs directeurs $\vec{u_1}$ et $\vec{w}$.

3) Pour démontrer que $\mathcal{P}$ a pour équation $-2x+y+5z+5=0$

on peut démontrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}-2\\1\\5\end{pmatrix}$ est normal à $\mathcal{P}$.

$\vec{u_1}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ $\vec{w}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$

On a $\vec{n}\cdot\vec{u_1} = -2+2+0 = 0$

$\vec{n}\cdot\vec{w} = -4-1+5 = 0$

donc $\vec{n}$ est normal à $\mathcal{P}$

donc $\mathcal{P}$ a une équation de la forme $-2x+y+5z+d=0$

$A \in \mathcal{P}$ donc $-2x_A+y_A+5z_A+d=0$

$-2+2-5+d=0$

donc $d=5$ donc $\mathcal{P}$ a pour équation $\boxed{-2x+y+5z+5=0}$

4a) (d_2) a pour vecteur directeur $\vec{u_2}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

$\mathcal{P}$ a pour vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}-2\\1\\5\end{pmatrix}$

On a $\vec{u_2}\cdot\vec{n} = 0+1+5 \neq 0$

donc $\vec{u_2}$ et $\vec{n}$ ne sont pas orthogonaux

donc (d_2) n'est pas parallèle au plan $\mathcal{P}$

donc (d_2) et $\mathcal{P}$ sont sécants.

b) Pour vérifier que $F(0; -\frac{5}{3}; -\frac{2}{3})$ est le point d'intersection de (d_2) et $\mathcal{P}$ on vérifie que F appartient à (d_2) et $\mathcal{P}$.

① On cherche t tel que $\begin{cases} 1+t = -\frac{5}{3} \\ 2+t = -\frac{2}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} t = -\frac{8}{3} \\ t = -\frac{8}{3} \end{cases}$

t existe donc $F \in (d_2)$

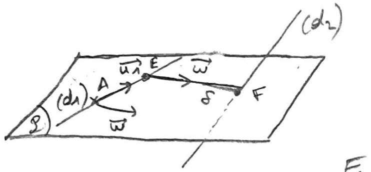
② On a $-2x_F+y_F+5z_F+5 = 0-\frac{5}{3}-\frac{10}{3}+5 = 0$

donc $F \in \mathcal{P}$.

Conclusion F est le point d'intersection de (d_2) et $\mathcal{P}$

Ex 2)

5) δ droite passant par F et de vecteur directeur $\vec{w}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$



$E\left(-\frac{2}{3} ; -\frac{4}{3} ; -1\right)$

$F\left(0 ; -\frac{5}{3} ; -\frac{2}{3}\right)$

$E \in (d_1)$ et $F \in (d_2)$

a) Pour justifier que EF est la distance entre (d_1) et (d_2) il faut vérifier que $(EF) \perp (d_1)$ et $(EF) \perp (d_2)$

On a $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}+\frac{2}{3}\\-\frac{5}{3}+\frac{4}{3}\\-\frac{2}{3}+1\end{pmatrix}$ $\quad\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{EF}\cdot\vec{u_1} = \frac{2}{3}\times 1 - \frac{1}{3}\times 2 + \frac{1}{3}\times 0 = 0$ donc $(EF)\perp(d_1)$

$\overrightarrow{EF}\cdot\vec{u_2} = \frac{2}{3}\times 0 - \frac{1}{3}\times 1 + \frac{1}{3}\times 1 = 0$ donc $(EF)\perp(d_2)$

b) Distance entre (d_1) et (d_2) : EF

$$EF = \|\overrightarrow{EF}\| = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{4}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{6}{9}} = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{3}}$$