Exercice 1 Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points suivants :

A(2 ; -1 ; 0), B(3 ; -1 ; 2), C(0 ; 4 ; 1) et S(0 ; 1 ; 4).

1. Vérifier que les points A, B et C définissent un plan que l'on notera plan (ABC).
2. **a.** Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC).

   b. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

   c. Montrer que les points A, B, C et S ne sont pas coplanaires.
3. Soit (d) la droite orthogonale au plan (ABC) passant par S.

   a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d).

   b. Cette droite coupe le plan (ABC) en H. Que représente le point H pour le tétraèdre SABC ?

   c. Calculer les coordonnées du point H.
4. **a.** Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.

   b. Calculer le volume du tétraèdre SABC.

   On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est $V = \frac{1}{3} \times$ Aire de la base $\times$ Hauteur.
5. **a.** Calculer les longueurs SA et SB.

   b. En déduire une mesure de l'angle $\widehat{\text{ASB}}$ approchée au dixième de degré.

Exercice 2 L'objectif de cet exercice est de déterminer la distance entre deux droites non coplanaires.

Par définition, la distance entre deux droites non coplanaires de l'espace, (d_1) et (d_2) est la longueur du segment [EF], où E et F sont des points appartenant respectivement à (d_1) et à (d_2) tels que la droite (EF) est orthogonale à (d_1) et (d_2).

L'espace est muni d'un repère orthonormé. Soit (d_1) la droite passant par A$(1\ ;\ 2\ ;\ -1)$ de vecteur directeur $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$

et (d_2) la droite dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1+t \\ z = 2+t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

1. Donner une représentation paramétrique de la droite (d_1)
2. Démontrer que les droites (d_1) et (d_2) sont non coplanaires.
3. Soit $\mathscr{P}$ le plan passant par A et dirigé par les vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$.

   Justifier qu'une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ est : $-2x+y+5z+5=0$.
4. **a.** Sans chercher à calculer les coordonnées du point d'intersection, justifier que la droite (d_2) et le plan $\mathscr{P}$ sont sécants.

   b. On note F le point d'intersection de la droite (d_2) et du plan $\mathscr{P}$.

   Vérifier que le point F a pour coordonnées $\left(0\ ;\ -\frac{5}{3}\ ;\ -\frac{2}{3}\right)$.
5. Soit (δ) la droite passant par F et de vecteur directeur $\overrightarrow{w}$.

   On admet que les droites (δ) et (d_1) sont sécantes en un point E de coordonnées $\left(-\frac{2}{3}\ ;\ -\frac{4}{3}\ ;\ -1\right)$.

   a. Justifier que la distance EF est la distance entre les droites (d_1) et (d_2).

   b. Calculer la distance entre les droites (d_1) et (d_2).